Modul Geometrie
WiSe 2010/2011
Schmale

Wiederholungsklausur
31. März 2011
14.00 bis 16.00
A14-1-101 und A14-1-102

Name	Vorname

Ich habe das Merkblatt gelesen.	Unterschrift:

Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

1 (6P)	2 (7P)	3 (7P)	4 (5P)	5 (5P)	Punkte Klausur	Bonus Punkte	**Note**

Bei allen Aufgaben, außer bei Aufgabe (3), sind Teilergebnisse und Ergebnisse mit Hilfe von Text fachsprachlich korrekt so darzustellen, dass Ihr Gedankengang und Ihr Rechenweg deutlich erkennbar sind. Nur dann können Ergebnisse angemessen gewertet werden.

Es sind maximal 30 Punkte in der Klausur erreichbar.

Dies sind die Aufgaben, viel Erfolg !

(1) **(6P)** In $\mathbb{R}^2$ sind folgende Punkte gegeben

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ a' = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix},\ b' = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix},\ c' = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

(a) (2P) Zeigen Sie: Es gibt eine Affinität f in $\mathbb{R}^2$, derart, dass

$$f(a) = a', f(b) = b', \quad \text{und} \quad f(c) = c' \ .$$

(b) (2P) Geben Sie eine Matrixdarstellung von f aus (a) an bezüglich der Standardbasis.

(c) (2P) Wie (b) aber nun für f^{-1}.

(2) **(7P)** Sei $\mathcal{E}$ die Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ p' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\ p'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit der Abbildungsvorschrift $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) (3P) Bestimmen Sie die Normalenform der Ebene $\mathcal{E}$, also einen Vektor u^* derart, dass $\mathcal{E} = u^* + (u^*)^\perp$.

(b) (1P) Zeigen Sie: $f(\mathcal{E}) = Au^* + (Au^*)^\perp$. [1]

(c) (3P) Bestimmen Sie $f(\mathcal{E}) \cap \mathcal{E}$.

---

[1] Sie dürfen folgende Ergebnisse aus der linearen Algebra benutzen: Falls ℓ eine metrische Abbildung in $\mathbb{R}^3$ ist und U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, dann gilt: $\ell(U^\perp) = \big(\ell(U)\big)^\perp$, oder auf einzelne Vektoren bezogen: $\forall\, w, u \in \mathbb{R}^3 :\ w \perp u \Leftrightarrow \ell(w) \perp \ell(u)$.

(3) **(7P)** Seien $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ vorgegeben.

Bilden Sie den Vektor a ab auf den Vektor b

(a) (4P) durch eine Hintereinanderausführung von elementaren Drehungen und einer Streckung.

(b) (3P) durch eine Schrägspiegelung an einer Ebene.

(4) **(5P)**

Beurteilen Sie **fünf der sechs** folgenden Aussagen in den Kästchen jeweils mit $\boxed{\text{richtig}}$ oder $\boxed{\text{falsch}}$. Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt. Jede falsche einen Minuspunkt. Keine Antwort ergibt jeweils 0 Punkte. Insgesamt weniger als 0 Punkte sind nicht möglich. **Wenn Sie sechs Aussagen beurteilen, wird (f) nicht gewertet.**

(a) Eine Bewegung in $\mathbb{R}^2$ mit zwei verschiedenen Fixpunkten ist eine orthogonale Spiegelung an einer Geraden oder die identische Abbildung.

(b) Es gibt eine Bewegung f in $\mathbb{R}^3$, die die Standardbasisvektoren $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ wie folgt abbildet: $f(e^{(1)}) = e^{(1)} - e^{(2)},\ f(e^{(2)}) = e^{(1)} + e^{(2)},\ f(e^{(3)}) = e^{(3)}$

(c) Die Hintereinanderausführung zweier orthogonaler Spiegelungen an Geraden in $\mathbb{R}^2$ ist wieder eine Spiegelung.

(d) Die Hintereinanderausführung einer Translation und einer Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ ist stets wieder eine Spiegelung an einer Geraden.

(e) Mit einer geeigneten Bewegung in $\mathbb{R}^3$ kann jede Permutation der Standardbasisvektoren bewirkt werden.

(f) Zu je zwei verschiedenen Punkten p, q in $\mathbb{R}^2$ gibt es eine Drehung in $\mathbb{R}^2$, die p in q abbildet.

(5) **(5P)** Gegeben sind drei Punkte p_1, p_2, p_3 in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$. Wir nennen Sie Ecken eines projektiven Dreiecks. Die projektiven Geraden $p_1 \vee p_2$, $p_2 \vee p_3$, $p_3 \vee p_1$ nennen wir projektive Dreiecksseiten.

(a) (2P) Seien Vektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ in R^3 gegeben derart, dass $p_i = \mathbb{R}u^{(i)}$ für $1 \leq i \leq 3$. Wie können Sie mit Hilfe einer linear-algebraischen Rechnung feststellen, ob die Punkte p_1, p_2, p_3 kollinear sind?

(b) (3P) Seien die drei Punkte <u>nicht</u> kollinear und a, b zwei weitere verschiedene Punkte derart, dass keiner der Punkte p_1, p_2, p_3 auf $a \vee b$ liegt. Zeigen Sie:
$a \vee b$ schneidet die projektiven Dreiecksseiten in drei verschiedenen Punkten.

(a) und **(b)** sind unabhängig voneinander.