Weitere Musterlösungen und teilweise auch nur knappe Lösungsskizzen, zu denen noch eigene Rechnungen und kleinere Nachweise erforderlich sind:

(1) Die Aussage von Beobachtung 9 in §1 lautet:

Eine Teilmenge g von K^2, K ein Körper, ist genau dann eine Gerade (im Sinne von Definition 1 in §1), wenn mit geeigneten $A \in K^{1\times 2}$, $A \neq 0$ und b in K gilt

$$g = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b) \quad \big(= \{x \in K^2 : \; Ax = b\}\big) \quad .$$

Ich weise die beiden Richtungen getrennt nach.

- Sei g eine Gerade in K^2. Nach Definition 1 in §1 hat g dann eine Darstellung der Form $\underline{g = a + Kv}$ mit $a, v \in K^2$ und $v \neq 0$. Da v nicht der Nullvektor ist, hat die lineare Gleichung ${}^{\mathsf{t}}v \cdot x = 0$ einen eindimensionalen Lösungsraum, etwa $\mathsf{L\ddot{o}s}\,({}^{\mathsf{t}}v, 0) = Kw$ mit einem von 0 verschiedenen w aus K. Zugleich ist dann auch $\mathsf{L\ddot{o}s}\,({}^{\mathsf{t}}w, 0) = Kv$ (!). Sei nun $A := {}^{\mathsf{t}}w$ und $b = Aa$ dann ist $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b) = a + Kv$ und daher $\underline{g = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)}$.
- Sei nun umgekehrt die Punktmenge g in der Form $\underline{g = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)}$ gegeben mit einem von 0 verschiedenen A aus $K^{1\times 2}$ und b aus K^2. Wir wissen dann aus der linearen Algebra dass $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)$ nicht leer ist und dass $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,0)$ eindimensional ist, etwa $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,0) = Kv$ mit v aus $K \setminus \{0\}$, und schließlich, dass $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)$ sich wie folgt zerlegen lässt: $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b) = a + \mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,0) = a + Kv$ mit einer einzelnen Lösung a aus $\mathsf{L\ddot{o}s}\,(A,b)$. <u>$g$ ist also eine Gerade im Sinne der Definition 1 in §1</u>.

(2) In K^2 gibt es stets mindestens die folgenden drei Paare paralleler Geraden:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{mit dem gemeinsamen Richtungsvektor} \quad \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{mit dem gemeinsamen Richtungsvektor} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{mit dem gemeinsamen Richtungsvektor} \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad .$$

In $\mathbb{Z}^2$ sind damit alle möglichen von 0 verschiedenen Richtungsvektoren erfasst. Man kann also keine vier Geraden finden ohne dass davon mindestens zwei parallel sind.

Sei daher ab jetzt $|K| \geq 3$ und α ein Element aus K, das von 0 und 1 verschieden ist. <u>Behauptung:</u> Die vier folgenden Geraden sind paarweise nicht parallel:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1\\\alpha\end{bmatrix}$$

<u>Nachweis:</u> Da $\mathsf{det} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \mathsf{det} \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = 1, \quad \mathsf{det} \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & \alpha\end{bmatrix} = \alpha, \quad \mathsf{det} \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = -1,$ $\mathsf{det} \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & \alpha\end{bmatrix} = -1$ $\mathsf{det} \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & \alpha\end{bmatrix} = \alpha - 1$ und $\alpha \neq 0, 1$, sind die Richtungsvektoren

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\\alpha\end{bmatrix}$$

der vier Geraden paarweise linear unabhängig und somit die vier Geraden paarweise nicht parallel.

Damit ist nachgewiesen, dass es nur in einem Körper mit zwei Elementen keine vier paarweise nicht parallele Geraden gibt. Dies beantwortet auch die Frage der Aufgabe.

(5) **(a)** Ist U die Richtung von H, dann ist hier vielleicht sogar ohne Rechnung zu sehen, dass $U^\perp = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Jedenfalls ist U dreidimensional und daher $U^\perp$ eindimensional und es ist leicht zu bestätigen, dass w in U liegt.

Man berechnet nun $H \cap U^\perp$ und erhält $H \cap U^\perp = \{\frac{1}{2} w\}$ und damit folgende Ergebnisse für den Aufgabenteil (a):

$$H = \mathsf{Lös}\left({}^{\mathsf{t}}w\ ,\ {}^{\mathsf{t}}w \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} w + U\ .$$

(b) Sei $H = H_1 \cap H_2$ wie in der Aufgabe vorgegeben. Sei weiter $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wir können a als gemeinsamen Stützvektor für die Hyperebenen H_1, H_2 benutzen. Am häufigsten wurde ungefähr so vorgegangen: Eine willkürliche Ergänzung der gegebenen Basis(!) für die Richtung des Schnittes zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ist:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Damit lassen sich wie folgt zwei geeignete Hyperebenen angeben:

$$H_1 = a + \langle v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad H_2 = a + \langle v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(4)} \rangle_{\mathbb{R}}\ .$$

Natürlich ist nun noch nachzuweisen oder zu bestätigen, dass tatsächlich $H_1 \cap H_2$ genau den vorgegebenen affinen Unterraum ergibt. Danach sind noch Gleichungen für H_1 und H_2 zu bestimmen.

Günstiger ist daher die folgende Alternative:
Zuerst ist H als $\mathsf{Lös}\,(A, b)$ darzustellen (siehe dazu 4.7 und 4.8) mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Die Zeilen von A müssen linear unabhängig und insbesondere von 0 verschieden sein (begründen!). Jede Zeile von $[A, b]$ kann jetzt benutzt werden, um zwei (dann tatsächlich geeignete!) Hyperebenen in Form einer Lösungsmenge einer linearen Gleichung anzugeben:
Seien dazu $z^{(1)}, z^{(2)}$ die Zeilen von A und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, dann ist zwangsläufig $\mathsf{dim}\ \ \mathsf{Lös}\,(z^{(i)}, b_i) = 3$ für $i = 1, 2$ und $\mathsf{Lös}\,(A, b) = \mathsf{Lös}\,(z^{(1)}, b_1) \cap \mathsf{Lös}\,(z^{(2)}, b_2)$=H. Setzt man fest $H_i = \mathsf{Lös}\,(z^{(i)}, b_i)$ für $i = 1, 2$, dann ist $H_1 \cap H_2 = H$ mit Hyperebenen H_1, H_2.

(6) Auf Grund der Definition der Menge $M_{\Gamma,\Delta}$ erkennt man zunächst, dass (vgl. Satz 5.4)

$$M_{\Gamma,\Delta} = \bigcup_{p\in\Gamma,\ q\in\Delta} p \vee q$$

und dass $\Gamma \cup \Delta \subseteq M_{\Gamma,\Delta}$.

$M_{\Gamma,\Delta}$ ist die Menge aller Punkte, die auf Verbindungsgeraden liegen zwischen je einem Punkt aus Γ und einem weiteren Punkt aus Δ.

Seien nun Γ und Δ zwei Geraden und etwa $\Gamma = a + \mathbb{R}u, \Delta = b + \mathbb{R}v$. Der kleinste affine Unterraum, der Γ und Δ enthält, ist nach Beobachtung 5.9

$$\Gamma \vee \Delta = a + \langle b-a, u, v\rangle_{\mathbb{R}} \ .$$

Er enthält nach Satz 4.11 zu je zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade. Es ist daher auf jeden Fall $M_{\Gamma,\Delta}$ in $\Gamma \vee \Delta$ enthalten und es geht nun darum, zu klären, ob $M_{\Gamma,\Delta} = \Gamma \vee \Delta$ und somit $M_{\Gamma,\Delta}$ ein affiner Unterraum ist.

Behauptung: *Wenn die beiden Geraden sich schneiden, dann ist $\Gamma \vee \Delta$ in $M_{\Gamma,\Delta}$ enthalten und somit $M_{\Gamma,\Delta} = \Gamma \vee \Delta$.*
Nachweis:
Wir können nun o.E. annehmen, dass $a = b$. Dann ist $\Gamma \vee \Delta = a + \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$. Ein beliebiger Punkt p aus $\Gamma \vee \Delta$, etwa $p = a + \alpha u + \beta v$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hat auch die Darstellung

$$p = \frac{1}{2}(a + 2\alpha u) + \frac{1}{2}(a + 2\beta v)$$

und liegt somit in $M_{\Gamma,\Delta}$ □

Behauptung: *Wenn Γ und Δ parallel und verschieden sind, dann ist $\Gamma \vee \Delta$ in $M_{\Gamma,\Delta}$ enthalten und somit $M_{\Gamma,\Delta} = \Gamma \vee \Delta$.*
Nachweis:
In diesem Fall ist $\Gamma \vee \Delta = a + \langle b-a, u\rangle_{\mathbb{R}}$. Ein beliebiger Punkt p aus $\Gamma \vee \Delta$, etwa $p = a + \alpha(b-a) + \beta u$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hat jetzt auch die Darstellung

$$p = (1-\alpha)(a + \beta u) + \alpha(b + \beta u)$$

und liegt somit in $M_{\Gamma,\Delta}$ □

Behauptung: *Wenn Γ und Δ nicht parallel und ohne Schnittpunkt sind, dann ist $M_{\Gamma,\Delta}$ eine echte Teilmenge von $\Gamma \vee \Delta$ und somit nach obigen Vorüberlegungen kein affiner Unterraum.*

Nachweis:
Jetzt ist $\Gamma \vee \Delta = a + \langle b-a, u, v\rangle_{\mathbb{R}}$ und dabei sind $b-a, u, v$ linear unabhängig. Sei p ein Punkt in $a + \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$, etwa $p = a + \rho u + \sigma v$ mit ρ, σ aus $\mathbb{R}$, der nicht auf Γ und damit auch nicht auf Δ liegt. Wenn es nun $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ aus $\mathbb{R}$ gäbe mit $\lambda + \mu = 1$ und derart, dass

$$p = a + \rho u + \sigma v = \lambda(a + \alpha u) + \mu(b + \beta v) \ ,$$

dann würde folgen (beachte $1 - \lambda = \mu$)

$$\mu(b-a) + (\lambda\alpha - \rho)u + (\mu\beta - \sigma)v = 0$$

und dann auf Grund der linearen Unabhängigkeit von $b-a, u, v$ insbesondere $\mu = 0, \lambda = 1$ und damit $p \in \Gamma$ im Gegensatz zu unseren Voraussetzungen.

Bemerkung zur Aufgabe: Wenn Sie die Aufgabe zunächst, wie vorgeschlagen, experimentell angehen und dann u.A. auch den Fall zweier windschiefer Geraden in einer Skizze betrachten, dann sehen Sie sehr schnell, dass in diesem Fall die Punkte in den beiden parallelen Ebenen $(a + \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$)und $(b + \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}$), die zugleich weder auf Γ noch auf Δ liegen, durch das Ziehen von Verbindungsgeraden $p \vee q$ mit p aus Γ und q aus Δ nicht erreicht werden können.

(7) **(a)** Anliegen dieser Aufgabe war es, die Studierenden zur Benutzung von Schlussweisen und Umformungen anzuregen, wie sie in der Vorlesung mehrfach angewandt wurden. Erstaunlicherweise und leider sind dem die meisten aus dem Wege gegangen.

Sei zur Abkürzung $\Gamma = \Gamma_t(a^{(0)}, \ldots, a^{(r)})$.

Ich möchte Satz 4.11 benutzen. Seien daher p, q aus Γ, $p \neq q$, und etwa

$$p = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)}, q = \sum_{i=0}^{r} \mu_i a^{(i)} \text{ mit } \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \sum_{i=0}^{r} \mu_i = \boldsymbol{t} \ . \tag{1}$$

Behauptung: $p \vee q \subseteq \Gamma$.
Nachweis: Ich benutze die Darstellung $p \vee q = \{\alpha p + \beta q : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1 \}$. Sei nun $\alpha p + \beta q$ aus $p \vee q$ mit $\alpha + \beta = 1$, dann folgt nach (1):

$$\alpha p + \beta q = \sum_{i=0}^{r} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) a^{(i)} \ .$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombination summieren sich auf zu

$$\sum_{i=0}^{r} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) = \alpha \sum_{i=0}^{r} \lambda_i + \beta \sum_{i=0}^{r} \mu_i = (\alpha + \beta)\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} \ .$$

Also liegt $\alpha p + \beta q$ in Γ. Da $\alpha p + \beta q$ ein beliebiger Punkt aus $p \vee q$ war, folgt $p \vee q \subseteq \Gamma$. $\square$

Da dabei p, q frei gewählte Punkte aus Γ waren, folgt insgesamt, das zu je zwei verschiedenen Punkten aus Γ auch deren Verbindungsgeraden in Γ liegt.

Nach Satz 4.11 bedeutet dies, dass Γ ein affiner Unterraum ist.

(b) Sei $a^{(0)}, \ldots, a^{(s)}$ ein affines Erzeugendensystem von Δ. Nach Voraussetzung der Aufgabe ist t nicht 0. Mit $b^{(i)} = \dfrac{1}{t} a^{(i)}$ für $1 \leq i \leq s$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\Gamma_t(b^{(0)}, \ldots, b^{(s)}) &= \{ \sum_{i=0}^{s} \lambda_i b^{(i)} : \lambda_0, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}, \sum_{(i=0}^{s} \lambda_i = t \} \\
&= \{ \sum_{i=0}^{s} \underbrace{\frac{1}{t}\lambda_i}_{=: \mu_i} \ a^{(i)} : \lambda_0, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}, \sum_{(i=0}^{s} \lambda_i = t \} \\
&= \{ \sum_{i=0}^{s} \mu_i a^{(i)} : \mu_0, \ldots, \mu_s \in \mathbb{R}, \sum_{(i=0}^{s} \mu_i = 1 \} \\
&= \Delta \ .
\end{aligned}$$

(9) Sei K ein Körper und seien a, b, c affin unabhängige Punkte in einem K-Vektorraum. Mit einem μ aus K werden folgende Punkte festgelegt:

$$a' = b + \mu(c - b), b' = c + \mu(a - c), c' = a + \mu(b - a) \ . \tag{2}$$

Dabei soll μ von 0 und 1 verschieden sein.

Die drei Geraden, um die es geht, haben folgende Darstellungen:

$$a \vee a' = a + K(a' - a), b \vee b' = b + K(b' - b), c \vee c' = c + K(c' - c) \ .$$

Behauptung: Wenn $\mu = \frac{1}{2}$, dann haben die drei Geraden $a' \vee a, b' \vee b, c' \vee c$ den so genannten Schwerpunkt $\frac{1}{3}(a+b+c)$ gemeinsam.

Nachweis: Wenn $\mu = \frac{1}{2}$, dann erhält man zunächst

$$a' = \frac{1}{2}(b+c), b' = \frac{1}{2}(c+a), c' = \frac{1}{2}(a+b)$$

und damit

$$\frac{1}{3}(a+b+c) = a + \frac{2}{3}(a'-a) = b + \frac{2}{3}(b'-b) = c + \frac{2}{3}(c'-c) \ .$$

Der Punkt $a' \vee a, b' \vee b, c' \vee c$ liegt demnach auf allen drei Geraden. □

Behauptung: Die drei Geraden schneiden sich **nur** wenn $\mu = \frac{1}{2}$.

Nachweis: Wir nehmen jetzt an, dass es einen gemeinsamen Punkt der drei Geraden gibt. Es muss dann α, β, γ in K geben, derart, dass

$$a + \alpha(a'-a) = b + \beta(b'-b) = c + \gamma(c'-c) \tag{3}$$

Setzen wir die Darstellungen aus (2) ein in (3), dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrr} & (1-\alpha)a & +\alpha(1-\mu)b & +\alpha\mu c \\ = & \beta\mu a & +(1-\beta)b & +\beta(1-\mu)c \\ = & \gamma(1-\mu)a & +\gamma\mu b & +(1-\gamma)c\ . \end{array}$$

Dies sind drei Affinkombinationen der drei affin unabhängigen Punkte a, b, c. Daher muss nach Beobachtung 5.15 gelten:

$$\begin{array}{rll} 1-\alpha & = \beta\mu & = \gamma(1-\mu) \\ \alpha(1-\mu) & = 1-\beta & = \gamma\mu \\ \alpha\mu & = \beta(1-\mu) & = 1-\gamma\ . \end{array}$$

Diese Gleichungen kann man mit verschiedenen Strategien auflösen. Am geschicktesten ist es wenn man diagonal aufsummiert. Man erhält dann nämlich

$$(1-\alpha) + (1-\beta) + (1-\gamma) = \beta\mu + \gamma\mu + \alpha\mu = \gamma(1-\mu) + \alpha(1-\mu) + \beta(1-\mu)\ ,$$

oder mit $\delta = \alpha + \beta + \gamma$:

$$3 - \delta = \mu\delta = \delta(1-\mu)\ .$$

Wenn $\delta = 0$, dann ergibt sich ein Widerspruch, und wenn $\delta \neq 0$, dann erhält man zwangsläufig $\mu = \frac{1}{2}$.

Die Voraussetzungen über μ wurden bei dieser Lösung nicht benutzt. □

(10) Eine „Hälfte“ der Bearbeitung war als Lückentext vorgegeben worden. Die andere besteht nun noch darin, folgende Behauptung im Kontext von §5 zu beweisen:

Wenn $a^{(j)} \in \bigvee_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{r} a^{(i)}$ *mit einem* j *aus* $\{0, \ldots, r\}$ *, dann sind* $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ *affin abhängig.*

Beweis: Wenn $a^{(j)} \in \bigvee_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} a^{(i)}$, dann lässt sich $a^{(j)}$ wie folgt darstellen:

$$a^{(j)} = \sum_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} \lambda_i a^{(i)}$$

mit λ_i aus K für $i \neq j$ und mit $\sum_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} \lambda_i = 1$. Bringt man nun $a^{(j)}$ auch noch auf die rechte Seite und sortiert nach den Differenzen $a^{(i)} - a^{(j)}$, dann erhält man

$$0 = \sum_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} \lambda_i a^{(i)} - \big(\underbrace{\sum_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} \lambda_i}_{=1}\big) a^{(j)} = \sum_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} \lambda_i \big(a^{(i)} - a^{(j)}\big) \ .$$

Da $\sum_{\substack{i=0\\j\neq i}}^{r} \lambda_i = 1$, können dabei nicht alle λ_i verschwinden. Die Vektorfamilie $\big(a^{(i)} - a^{(j)}\big)_{1\leq i\leq r, i\neq j}$ ist also linear abhängig. Nach Satz 5.12(a) sind damit die Punkte $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ affin abhängig. □

Zusatz für Freundinnen und Freunde formaler Sprache aber nicht unbedingt als Vorbild für eine Musterlösung:

Eine kompakte Lösung der gesamten Aufgabe unter Benutzung von Quantoren und Implikationspfeilen kann z.B. so aussehen:

Wenn $r = 0$, lautet die dann trivialerweise richtige Aussage der Aufgabe so:

$$a^{(0)} \text{ affin abhängig } \Leftrightarrow \ a^{(0)} \in \varnothing$$

Beide Seiten der Implikation sind für einen Punkt $a^{(0)}$ immer falsch.
Sei ab jetzt $r \geq 0$. Dann besteht folgende Kette von Implikationen:

$$\begin{aligned}
a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} \text{ affin abhängig } &\overset{5.12a}{\Leftrightarrow} \ a^{(1)} - a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} - a^{(0)} \text{ linear abhängig} \\
&\Leftrightarrow \ \exists_{j\in\{1,\ldots,r\}} \exists_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\\ \lambda_j=1}} : \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (a^{(i)} - a^{(0)}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ \exists_{j\in\{1,\ldots,r\}} \exists_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\\ \lambda_j=1}} : \ a^{(j)} - a^{(0)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} \lambda_i (a^{(i)} - a^{(0)}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ \exists_{j\in\{1,\ldots,r\}} \exists_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\\ \lambda_j=1}} : \ a^{(j)} = \big(1 - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} \lambda_i\big) \cdot a^{(0)} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} \lambda_i \cdot a^{(i)} \\
&\Leftrightarrow \ \exists_{j\in\{1,\ldots,r\}} : \ a^{(j)} \in \overline{\{a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}\} \setminus \{a^{(j)}\}}^{\,\mathsf{aff}} \\
&\Leftrightarrow \ \exists_{j\in\{1,\ldots,r\}} : \ a^{(j)} \in \bigvee_{\substack{i=0\\ j\neq i}}^{r} a^{(i)}
\end{aligned}$$

□

(12) (a) Da $\mathsf{det}\, B$ nicht 0 ist, ist ℓ_B ein Isomorphismus. Dann ist aber auch f bijektiv, denn für $x, y \in \mathbb{R}^3$ folgt: $f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; Bx = By \;\Leftrightarrow\; x = y$. f ist also injektiv. Außerdem ist $f\big(B^{-1}(y-b)\big) = y$ zu vorgegebenem y aus $\mathbb{R}^3$. f ist also auch surjektiv und da f als affine Abbildung vorgegeben ist, ist f eine Affinität.

Wenn f eine Streckung wäre, dann müsste nach Beispiel 6.8 für **alle** x aus $\mathbb{R}^3$ und eine reelle Zahl α gelten:

$$f(x) = f(0) + \alpha x = b + Bx = b + \alpha\, x\ .$$

Dies ist nur möglich, wenn α alleiniger Eigenwert ist von B. Laut Aufgabenstellung hat B aber zwei verschiedene Eigenwerte. f ist also keine Streckung als affine Abbildung auf dem ganzen Raum $\mathbb{R}^3$.

(b) Da $f(a) = a$ und $Bu^{(i)} = 2u^{(i)}$ für $i = 1, 2$, gilt für alle $u \in U$:

$$f(a+u) = a + Bu = a + 2u\ .$$

Die Einschränkung $f_{|\Gamma}$ von f auf Γ ist demnach eine Streckung mit Streckungsfaktor 2 und Zentrum (einzigem Fixpunkt) a.

(c) Da $u^{(1)}, u^{(2)}$ linear unabhängig sind, ist $a, a+u^{(1)}, a+u^{(2)}$ eine affine Basis von Γ. Nach Beobachtung 6.6 genügt es, die Bilder für diese drei Punkte vorzugeben, um eine affine Abbildung zu erhalten. Seien daher für die zu konstruierende Abbildung $g : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ folgende Bildpunkte vorgegeben:

$$g(a) = 0,\ \ g(a+u^{(1)}) = e^{(1)},\ \ g(a+u^{(2)}) = e^{(2)}\ .$$

Da $0, e^{(1)}, e^{(2)}$ eine affine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, folgt mit Hilfe von Satz 6.12, dass f eine Affinität ist.

(13) (a) Für alle x aus $\mathbb{R}^3$ ist $f(x) = f(0) + \dfrac{1}{4}\,x$ mit $f(0) = \dfrac{1}{4}\,(e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)})$. f ist also eine Streckung (vgl. 6.8) mit Streckungsfaktor $\dfrac{1}{4}$ und damit auch eine Affinität. Das Zentrum der Streckung (einziger Fixpunkt) ist $\dfrac{1}{3}(e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)})$.

(b) Seien p, q zwei verschieden Punkte. Für λ aus $\mathbb{R}$ gilt dann nach Teil (a)

$$f(p + \lambda(q-p)) = f(0) + \frac{1}{4}\,p + \lambda\frac{1}{4}(q-p)\ .$$

Daher ist $f(p \vee q) = f(p) + \langle \frac{1}{4}(q-p) \rangle_{\mathbb{R}}$.

(c) Sei zur Abkürzung $K_r = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ {}^{\mathsf{t}}xx = r^2\}$.
<u>Behauptung:</u> $f(K_1) = f(0) + K_{1/4}$
<u>Nachweis:</u>

- <u>$\subseteq$:</u> Es folgt:

$$x \in K_1 \quad\Rightarrow\quad {}^{\mathsf{t}}(f(x) - f(0)) \cdot (f(x) - f(0)) = \frac{1}{16}\,{}^{\mathsf{t}}xx = \frac{1}{16} \quad\Rightarrow\quad f(x) \in f(0) + K_{1/4}$$

- <u>$\supseteq$:</u> Sei $y \in K_{1/4}$, dann liegt der Punkt x mit $x = 4y$ in K_1 und $f(x)$ in $f(0) + K_{1/4}$ denn $f(x) = f(0) + y$. Daher gibt es zu jedem Punkt $f(0) + y$ aus $f(0) + K_{1/4}$ einen Punkt x in K_1 derart, dass $f(x)$ in $f(0) + K_{1/4}$ liegt.
  Es folgt damit: $f(0) + K_{1/4} \subseteq f(K_1)$. $\square$

(15) **(a)** Diese Aufgabe ist, wie etliche andere, eine Rechenaufgabe. Die Berechnungen können aber nur zielführend begonnen werden, nachdem die in der Aufgabe implizit angesprochenen Begriffe, Definitionen und Ergebnisse aus der Vorlesung rezipiert worden sind. Dies wird auch bei den folgenden Lösungshinweisen vorausgesetzt, die der ausführlichen Anleitung zu dieser Aufgabe in der Vorlesung folgen.

Seien $a^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, a^{(1)} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}, a^{(2)} = \begin{bmatrix}4\\-4\end{bmatrix}$. Sie bestätigen leicht, dass die beiden Punkte $a^{(0)}, a^{(1)}$ in Γ liegen und $a^{(2)}$ nicht und dass außerdem $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$ affin unabhängig sind.
Auf Grund der Information in der Aufgabenstellung, dass eine ganz bestimmte Spiegelung sein soll, sie sei mit f bezeichnet, können Sie nun die Bilder der gerade ausgewählten Punkte unter f ermitteln. Sie erhalten:

$$f(a^{(0)}) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, f(a^{(1)}) = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}, f(a^{(2)}) = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} .$$

Wie erklärt sich das? Alle Punkte in Γ werden unter f festgelassen! Da außerdem $a^{(2)} = a^{(0)} + \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$, ist $f(a^{(2)}) = a^{(0)} - \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$.

Da $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$ affin unabhängig sind, ist die affine Abbildung f durch die eben berechneten Bildpunkte vollständig festgelegt. Entsprechend ist nun die zu f gehörende lineare Abbildung ℓ_f vollständig bestimmt durch die Bilder $\ell_f(a^{(1)} - a^{(0)})$ und $\ell_f(a^{(2)} - a^{(0)})$. Man berechnet:

$$\ell_f(a^{(1)} - a^{(0)}) = f(a^{(1)}) - f(a^{(0)}) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}, \ell_f(a^{(2)} - a^{(0)}) = f(a^{(2)}) - f(a^{(0)}) = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix} .$$

Für die Matrix F von ℓ_f muss nun gelten

$$\boldsymbol{F} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-4}\end{bmatrix} = F\cdot\left[a^{(1)} - a^{(0)},\, a^{(2)} - a^{(0)}\right] = \left[f(a^{(1)}) - f(a^{(0)}),\, f(a^{(2)}) - f(a^{(0)})\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{bmatrix} .$$

Man erhält damit

$$F = \begin{bmatrix}4 & -3\\3 & 4\end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}7 & 24\\24 & -7\end{bmatrix} .$$

Außerdem ist $f(0) = f(a^{(0)}) + \ell_f(0 - a^{(0)}) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + F \cdot \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}18\\-24\end{bmatrix}$.

Die Matrixdarstellung der Spiegelung f lautet damit

$$f(x) = \frac{1}{25}\left(\begin{bmatrix}18\\-24\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7 & 24\\24 & -7\end{bmatrix} \cdot x\right) \quad \text{für } x \text{ aus } \mathbb{R}^2 .$$

(b) Man kann genau wie in (a) vorgehen. Während die Spiegelung in (a) „orthogonal“ verläuft, ist dies im Teil (b) nicht der Fall, es handelt sich um eine „Schräg“Spiegelung, oder darum, wie eine orthogonale Spiegelung unter einem anderen Blickwinkel erscheint! Das Ergebnis (**berichtigt auf Grund eines Hinweises**) für die Spiegelung f in (b) ist

$$f(x) = \begin{bmatrix}\mathbf{4}\\ \mathbf{8}\\ \mathbf{4}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{-3} & \mathbf{8}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{5}\end{bmatrix} \cdot x \quad \text{für } x \text{ aus } \mathbb{R}^3 .$$

(16) Man stellt zunächst fest, dass die affin unabhängigen Punkte $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ in Γ liegen und dass auf jeden Fall die Dimension von Γ höchstens 2 ist. Daher ist $\Gamma = e^{(1)} \vee e^{(2)} \vee e^{(3)}$.

(a) Sei $A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$. Mit Hilfe der Matrix A kann eine lineare Abbildung ℓ von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ erklärt werden und dann gilt $f = \ell_{|\Gamma}$. Als lineare Abbildung ist ℓ auch affin und damit ebenso f. Da die Bilder a, b, c der Standard-Basisvektoren affin unabhängig sind (nachzuweisen), ist f eine Affinität (Vgl. Satz 6.12).

(b) (i) Da $\Gamma = e^{(2)} + \langle e^{(1)} - e^{(2)}, e^{(3)} - e^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$, hat ein Punkt q aus Γ die Darstellung

$$q = e^{(2)} + \alpha(e^{(3)} - e^{(2)}) \; + \; \beta(e^{(1)} - e^{(2)}) \text{ mit } \alpha, \beta \text{ aus } \mathbb{R}.$$

Mit dieser Darstellung lässt sich der durch f gespiegelte Punkt $f(q)$ in Γ leicht angeben:

$$f(q) = e^{(2)} + \alpha(e^{(3)} - e^{(2)}) \; - \; \beta(e^{(1)} - e^{(2)}) \; .$$

Um nun zu zeigen, dass $g \circ h = h \circ f$ mit der in der Aufgabe vorgegebenen Abbildung g, genügt es, zu zeigen, dass

$$g(h(e^{(i)})) = h(f(e^{(i)})) \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 3 \; .$$

Ich berechne:

$$\begin{aligned}
(g \circ h)(e^{(1)}) &= d + Ga = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad | \quad (h \circ f)(e^{(1)}) = -a + 2b = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\
(g \circ h)(e^{(2)}) &= d + Gb = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad | \quad (h \circ f)(e^{(2)}) = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
(g \circ h)(e^{(3)}) &= d + Gc = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad | \quad h \circ f)(e^{(3)}) = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

(ii) Dieser Teil kann mit den Methoden von Aufgabe (15) bearbeitet werden oder so: Auf Grund der Vorgaben für f ist $\mathsf{Fix}_f = H \cap \Gamma$. Nach (i) und 6.20 (c) sind Fix_f und Fix_h affin äquivalent. Außerdem ist $g(d + (a - b)) = d - (a - b)$. Damit ist g die Spiegelung an $\underbrace{h(H \cap \Gamma)}_{=b \vee c}$ in Richtung $\langle a - b \rangle_{\mathbb{R}}$.

Es lohnt sich, dies auch an einer Skizze zu verfolgen.

(17) (i) Vorgegeben ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = a + Ax$ für $x \in \mathbb{R}$, und mit $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Auf Grund der Ergebnisse 6.22 und 6.23 ist es zweckmäßig, zuerst nachzusehen ob Fixpunkte vorliegen. Dazu bestimme ich genau wie in Beispiel 6.24 Lösungen der linearen Gleichung $a + Ax = x$, bzw. $\mathsf{Lös}\,(A - E, -a)$ und erhalte als Ergebnis

$$\mathsf{Lös}\,(A - E, -a) = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \} \; .$$

Nach Beobachtung 6.18 ist damit f konjugiert zu einer linearen Abbildung und wir können ihren Typ nach 6.23 bestimmen, indem wir einfach die Eigenwerte von A ermitteln. Man erhält $1 + i$ und $1 - i$. Damit haben wir nach 6.22 das Ergebnis: f ist eine Drehstreckung.

(ii) Vorgegeben ist jetzt die affine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = b + Bx$ für $x \in \mathbb{R}$, und mit $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Nach kurzer Rechnung stellt man fest, dass g keinen Fixpunkt hat. Es kommt zur Bestimmung des Typs von g also nur noch 6.23 in Frage. Auch hier sind dann die Eigenwerte B zu bestimmen. Man erhält 1 und -1. Es liegt also der Fall 6.23 a (ii) vor und g ist demnach eine Parallelstreckung mit Verschiebung, manchmal auch Schubstreckung genannt.

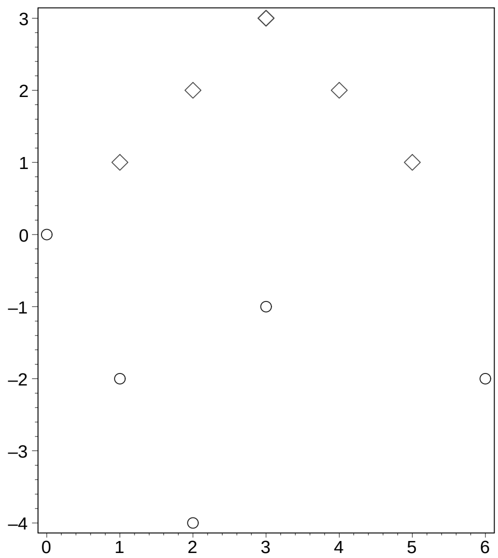
(iii) Ich gehe vor wie in (i) und (ii). Jetzt ist die Abbildung $f \circ g$ vorgelegt. Sie hat die Abbildungsvorschrift $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(b+Bx) = a+Ab+ABx$ für x aus $\mathbb{R}^2$. Sie hat ebenso wie f genau einen Fixpunkt, nämlich $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -25-17\sqrt{3} \\ -1+1\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte sind bei den gegebenen Daten ganz leicht zu berechnen. AB hat die beiden verschiedenen Eigenwerte $\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $-\sqrt{3}$ und besitzt somit zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Nach 6.22 ist damit $f \circ g$ eine Euleraffinität.

(iv) Schließlich ist ist die Abbildung $g \circ f$ vorgelegt. Sie hat die Abbildungsvorschrift $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a + Ax) = b + Ba + BAx$ für x aus $\mathbb{R}^2$.
Eine kurze Rechnung zeigt, dass BA einen Fixpunkt hat und dieselbe Eigenvektoren und Eigenvektoren wie AB. Auch $g \circ f$ ist also eine Euleraffinität.

(18) (a) Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen des Aufgabenteils (a) und einer Affinität $h : \Gamma \to \Delta$ gilt für alle x aus Γ:

$$x \in \mathsf{Fix}_f \Leftrightarrow f(x) = x \overset{h \text{ Affinität}}{\Leftrightarrow} h(f(x)) = h(x) \overset{g \circ h = h \circ f}{\Leftrightarrow} g(h(x)) = h(x) \Leftrightarrow h(x) \in \mathsf{Fix}_g$$

(b) Die Lage der gegebenen Punkte ist in der folgenden Zeichnung wiedergegeben.



Eine Affinität in $\mathbb{R}^2$ ist schon durch die Bilder von drei affin unabhängigen Punkten vorgegeben. Die weiteren Punkte werden dann zwangsläufig entsprechend ihrer affinen Abhängigkeiten abgebildet.
Auf Grund dieser Überlegung ergibt sich folgender Ansatz für eine Affinität, die möglicherweise M auf N abbildet

$$f(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}) := \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, f(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) := \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}, f(\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}) := \begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$$

Dadurch ist f als Affinität festgelegt, denn erstens sind die Definitionspunkte affin unabhängig (!) und zweitens auch die gewählten Bildpunkt (!).
Was passiert nun mit den übrigen Punkten? Ich berechne

$$f(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}) = f(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}) = \frac{1}{2}f(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) + \frac{1}{2}f(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

und

$$f(\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}) = f(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}) = \frac{1}{2}f(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}) + \frac{1}{2}f(\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} .$$

Man sieht so, dass die Affinität f tatsächlich M auf N abbildet. Die Punktmengen M und N sind also affin äquivalent.

(19) Man kann vorgehen wie bei Satz 6.25, nur dass nun zusätzlich die benutzten Geraden in Parameterform angegeben werden sollen und eine Zeichnung angefertigt werden soll.
Mit $e^{(0)} = 0$ und $e^{(1)}, e^{(2)}$ wie üblich berechne ich

$$f(e^{(0)}) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, f(e^{(1)}) = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, f(e^{(2)}) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} .$$

Zur Abkürzung bezeichne ich wie in 6.25 die berechneten Punkte mit $a^{(i)}, 0 \leq i \leq 2$. Durch diese Bildpunkte ist f als affine Abbildung vollständig festgelegt. Die Bildpunkte sind affin unabhängig. Es genügt daher die erste Spiegelung an Hand dieser Bildpunkte festzulegen, die zweite an Hand der neuen Bildpunkte usf.
<u>1. Schritt:</u> Sei h_0 die orthogonale Spiegelung an der Geraden Γ_0 in Richtung $\mathbb{R}a^{(0)}$ mit

$$\Gamma = \frac{1}{2}a^{(0)} + (a^{(0)})^{\perp} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} .$$

Es gilt dann (dies war nicht verlangt)

$$h_0(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}(x - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) \text{ für } x \text{ aus } \mathbb{R}^2.$$

Damit erhalte ich wie gewünscht $h_0(a^{(0)}) = 0$ und außerdem $h_0(a^{(1)}) = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ und $h_0(a^{(2)}) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Um diese Bildpunkte zu berechnen benötigt man allerdings die vollständige Abbildungsvorschrift nicht, da ja die Spiegelung geometrisch vorgegeben ist. So ist z.B. ja $a^{(1)} = \frac{1}{2}a^{(0)} + \frac{3}{2}a^{(0)}$ und wird somit gespiegelt in den Punkt $\frac{1}{2}a^{(0)} - \frac{3}{2}a^{(0)}$ also in den Punkt $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$. Die neuen Bildpunkte seien mit $b^{(i)}, 1 \leq i \leq 2$ bezeichnet.
<u>2. Schritt:</u> Sei h_1 die Spiegelung an Γ_1 in Richtung $\mathbb{R}(b^{(1)} + e^{(1)})$ mit $\Gamma_1 = \mathbb{R}(b^{(1)} - e^{(1)})$.
Es gilt dann

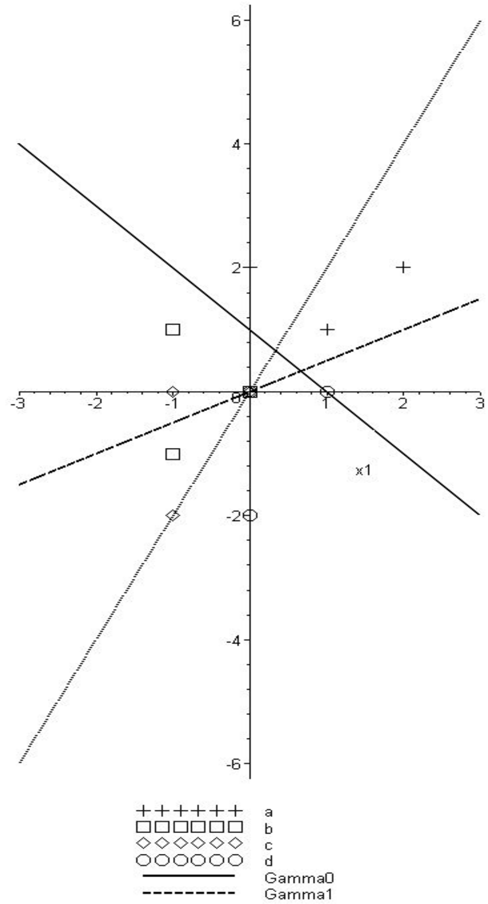
$$h_1(x) = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix} x \text{ für } x \text{ aus } \mathbb{R}^2$$

und ich erhalte $h_1(b^{(0)}) = 0, h_1(b^{(1)}) = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, h_1(b^{(2)}) = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$. Diese Punkte seien mit $c^{(0)}, c^{(1)}, c^{(2)}$ bezeichnet.
<u>3: Schritt:</u> Sei h_2 die Spiegelung an Γ_2 in Richtung $\mathbb{R}e^{(1)}$ mit $\Gamma_2 = \mathbb{R}(\pi_2(c^{(2)}) + c^{(2)})$. Dabei ist π_2 die orthogonale Projektion auf $\mathbb{R}e^{(2)}$. Hier ist

$$h_2(x) = \begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{bmatrix} x \text{ für } x \text{ aus } \mathbb{R}^2.$$

Nun kann man leicht nachprüfen, dass gilt

$$h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ f = \ell_{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}} .$$



(20) Bearbeitung für eine beliebige Primzahl p.
Sei $E = \langle e^{(1)}, e^{(2)} \rangle_{\mathbb{Z}_p}$ in $\mathbb{Z}_p^3$. E enthält p^2 Punkte als zweidimensionaler Untervektorraum über einem Körper mit p Elementen. Somit gibt es außerhalb von E noch $p^3 - p^2$ Punkte. Zu jedem Punkt w , der nicht in E liegt gibt es eine Schrägspiegelung h_w an E in Richtung $\mathbb{Z}_p w$. Ihre Abbildungsvorschrift ist

$$h_w(u + \lambda w) = u - \lambda w \quad \text{für } u \in E \text{ und } \lambda \in \mathbb{Z}_p \ . \tag{4}$$

Diese Abbildungsvorschrift ist vollständig, denn, wenn w nicht aus E ist, dann ist $E + \mathbb{Z}_p w = \mathbb{Z}_p^3$ und jeder Punkt in $\mathbb{Z}_p^3$ hat eine Darstellung in der Form $u + \lambda w$ mit einem λ aus $\mathbb{Z}_p$.
Wenn $p = 2$, dann ist h_w nach (4) stets die Identität, die in diesem Fall die einzige Schrägspiegelung überhaupt darstellt.
Sei nun $p > 2$.
Wann ist $h_w = h_{w'}$ für zwei Punkte w, w', die beide nicht in E liegen?
Nehmen wir also an, dass $h_w = h_{w'}$ mit $w, w' \in \mathbb{Z}_p \setminus E$ und dass etwa $w' = u' + \lambda w$ mit u' aus E und λ aus $\mathbb{Z}_p$. Man berechnet dann

$$h_w(w') = u' - \lambda w \quad \text{und} \quad h_{w'}(w') = -w' = -(u' + \lambda w) \ .$$

Unter der Annahme „$h_w = h_{w'}$“ folgt $2u' = 0$ und $(p > 2)$ damit $u' = 0$ und $w' \in \mathbb{Z}_p w \setminus \{0\}$.
Umgekehrt gilt $h_{w'} = h_w$ für alle w' aus $(\mathbb{Z}_p w) \setminus \{0\}$ und dabei ist $(\mathbb{Z}_p w) \setminus \{0\} = (\mathbb{Z}_p w) \setminus E$.
$(\mathbb{Z}_p w) \setminus \{0\}$ enthält $p - 1$ Elemente. Demnach gibt es $\dfrac{p^3 - p^2}{p - 1}$, bzw. p^2 Schrägspiegelungen.

(23) Im Kontext der Aufgabe (22) und dieser Aufgabe wurde in Vorlesung und Übungen der folgende Sachverhalt aus der linearen Algebra wiederholt:

Sei Γ ein (nicht leerer) affiner Unterraum in $\mathbb{R}^n$, etwa $\Gamma = a + U$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und einem Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$. Für einen Punkt p in Γ gilt:

$$p \perp U \quad \Leftrightarrow \quad \| p \| \leq \| x \| \text{ für alle } x \text{ aus } \Gamma.$$

Man stellt leicht fest, dass $\mathsf{Lös}\,(A, b) = \varnothing$ mit A, b aus der Aufgabe. Gäbe es eine Lösung v dann wäre $\| Av - b \| = 0$. Es soll nun ein möglichst kurzer Vektor v gefunden werden, mit dem der Abstand $\| Av - b \|$ minimal wird.
Sei $\Gamma = \{Av - b : \ v \in \mathbb{R}^n\}$. Γ ist ein affiner Unterraum. Die Normalenform nach Satz 4.12 von Γ sei $u^* + (u^*)^\perp$ (beachte $0 \notin \Gamma$). Dabei ist $(u^*)^\perp = \{Av : \ v \in \mathbb{R}^3\}$ die Richtung von Γ. Nach obiger Wiederholung ist u^* kürzester Vektor in Γ. Seine Berechnung ist mit Schulkenntnissen oder nach [Sch] Seite 1 und bei den vorgelegten Daten rasch möglich.
Jetzt ist aber noch ein kürzester Vektor v zu finden, mit dem gilt $Av - b = u^*$, bzw. ein kürzester Vektor in dem affinen Unterraum $\mathsf{Lös}\,(A, b + u^*)$.

(24) Diese Aufgabe war eine Zusatzaufgabe über Weihnachten für Theoriebegeisterte.
Es genügt bei (a) und (b) nur jeweils eine der beiden Implikationen nachzuweisen, denn wenn für alle affinen Abbildungen und alle Affinitäten h in K^n eine gewisse Eigenschaft von f immer auch für $h \circ f \circ h$ gilt, dann gilt sie auch für $h^{-1} \circ (h \circ f \circ h^{-1}) \circ h$ denn $h \circ f \circ h$ ist affin und h^{-1} eine Affinität. Dabei ist $h^{-1} \circ (h \circ f \circ h^{-1}) \circ h = f$.

(a) Sei f eine Translation, etwa $f = T_a$ mit $a \in K^n$. Sei weiter h eine Affinität in K^n mit zugehöriger linearer Abbildung ℓ_h.
Behauptung: $h \circ T_a = T_b \circ h$ mit $b = \ell_h(a)$.
Nachweis: Für alle x aus K^n ist

$$\big(h \circ T_a\big)(x) = h(a + x) = h(a) + \ell_h(x)$$

und

$$\big(T_b \circ h\big)(x) = \big(T_{\ell_h(a)} \circ h\big)(x) = \ell_h(a) + h(x) = \ell_h(a) + (h(a) + \ell_h(x - a)) = h(a) + \ell_h(x) \,.$$

Da h als Affinität invertierbar ist, folgt aus der Behauptung, dass $h \circ f \circ h^{-1}$ eine Translation ist.

(b) Sei Γ ein affiner Unterraum in K^n, etwa $\Gamma = a + U_1$ mit $a \in K^n$ und einem Untervektorraum U_1 von K^n. Sei U_2 ein weiterer Untervektorraum und gelte $U_1 \oplus U_2 = K^n$. Nun sei f die Spiegelung an U_1 entlang U_2.
Behauptung: $h \circ f \circ h^{-1}$ ist die Spiegelung an $h(\Gamma)$ entlang $\ell_h(U_2)$.
Nachweis: ℓ_h ist ein Isomorphismus von K^n. Daher gilt $W_1 \oplus W_2 = K^n$ mit der Abkürzung $\ell_h(U_i) = W_i$ für $i = 1, 2$.
Es ist $h(\Gamma) = h(a) + W_1$. Sei nun g die Spiegelung an $h(a) + W_1$ entlang W_2.
Jeder Punkt aus K^n hat zwei verschiedene Darstellungen, einmal in der Form $a + u^{(1)} + u^{(2)}$ mit $u^{(i)} \in U_i$ und einmal in der Form $h(a) + w^{(1)} + w^{(2)}$ mit $w^{(i)} \in W_i$ $(i = 1, 2)$.
Die eine Darstellung ist günstig zur Beschreibung von f die andere für g, denn es gilt

$$f(a + u^{(1)} + u^{(2)}) = a + u^{(1)} - u^{(2)} \quad \text{und} \quad g(h(a) + w^{(1)} + w^{(2)}) = h(a) + w^{(1)} - w^{(2)} \,.$$

Damit erhält man für beliebige $u^{(i)} \in U_i$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} \big(h \circ f\big)(a + u^{(1)} + u^{(2)}) &= h(f(a + u^{(1)} + u^{(2)})) = h(a + u^{(1)} - u^{(2)}) \\ &= h(a) + \ell_h(u^{(1)} - u^{(2)}) \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\big(g\circ h\big)(a+u^{(1)}+u^{(2)}) &= g(h(a+u^{(1)}+u^{(2)})) = g(h(a)+\ell_h(u^{(1)}+u^{(2)}))\\
&= g(h(a)+\underbrace{\ell_h(u^{(1)})}_{\in W_1}+\underbrace{\ell_h(u^{(2)})}_{\in W_2}) = h(a)+\ell_h(u^{(1)})-\ell_h(u^{(2)})\\
&= h(a)+\ell_h(u^{(1)}-u^{(2)})\ .
\end{aligned}
$$

Es folgt $h\circ f = g\circ h$. Da h als Affinität invertierbar ist, ergibt sich nun dass $h\circ f\circ h^{-1}$ eine Spiegelung ist.

(27) Behauptung: *Eine Translation in $\mathbb{R}^n$ kann als Hintereinanderausführung zweier orthogonaler Spiegelungen dargestellt werden.*
Für einen Nachweis können auf Grund von Vorüberlegungen, Skizzen oder Ähnlichem in einer Behauptung zwei konkrete orthogonale Spiegelungen angegeben werden, mit denen es funktioniert. Dies ist dann nachzuweisen.
Im Folgenden wird angenommen, es gäbe zwei orthogonale Spiegelungen an Hyperebenen senkrecht zur Translationsrichtung, die hintereinander ausgeführt eine gegebene Translation bewirken, und dann die Gesamtheit aller solchen Spiegelungspaare gefunden.
Sei also T_a eine Translation in $\mathbb{R}^n$ und dabei a nicht 0. $a^\perp$ ist dann eine Hyperebene durch 0. Sie sei mit U bezeichnet. Es gilt dann $U\oplus\mathbb{R}\,a=\mathbb{R}^n$. Wir werden an zwei Hyperebenen Γ_1 und Γ_2 parallel zu U spiegeln. Sie lassen sich wie folgt darstellen

$$\Gamma_1=\alpha_1 a+U \quad\text{und}\quad \Gamma_2=\alpha_2 a+U\ .$$

Jeder Punkt x aus $\mathbb{R}^n$ hat zwei Darstellungen:

$$x=\alpha_1 a+u+\lambda_1 a \quad\text{und}\quad x=\alpha_2 a+u+\lambda_2 a$$

mit u aus U und reellen Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\lambda_2$. Bezeichnen wir die orthogonalen Spiegelungen an Γ_1 und Γ_2 mit f_1 und f_2 , dann berechnen sich die Bildpunkte von $f_1\circ f_2$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\big(f_1\circ f_2\big)(x) &= f_1(f_2(\alpha_1 a+u+\lambda_1 a))\\
&= f_1(\alpha_1 a+u-\lambda_1 a))\\
&= f_1(\alpha_2 a+u+(\alpha_1-\alpha_2-\lambda_1)a)=\\
&= \alpha_2 a+u-(\alpha_1-\alpha_2-\lambda_1)a\\
&= (2\alpha_2-\alpha_1+\lambda_1)a+u\\
&= a+(\alpha_1 a+u+\lambda_1 a)+(2\alpha_2-2\alpha_1-1)a\\
&= a+x+(2\alpha_2-2\alpha_1-1)a\\
&= T_a(x)+(2\alpha_2-2\alpha_1-1)a
\end{aligned}
$$

Damit die Gleichheit $f_1\circ f_2=T_a$ eintritt, muss demnach gelten: $\alpha_2-\alpha_1=\frac{1}{2}$.
Nun ist noch zu bestätigen, dass tatsächlich $f_1\circ f_2$ die Translation T_a ergibt, wenn $\alpha_1-\alpha_2=\frac{1}{2}$.

(28) Die Betrachterin kann sich im Punkt v befunden haben:
Die zwei Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks mit den Ecken a',b',c',d' schneiden sich in den Punkten F_1 und F_2. Die Schnittpunkte sind mit den gegebenen Daten sehr leicht zu berechnen. Das Ergebnis ist:

$$F_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ F_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\ .$$

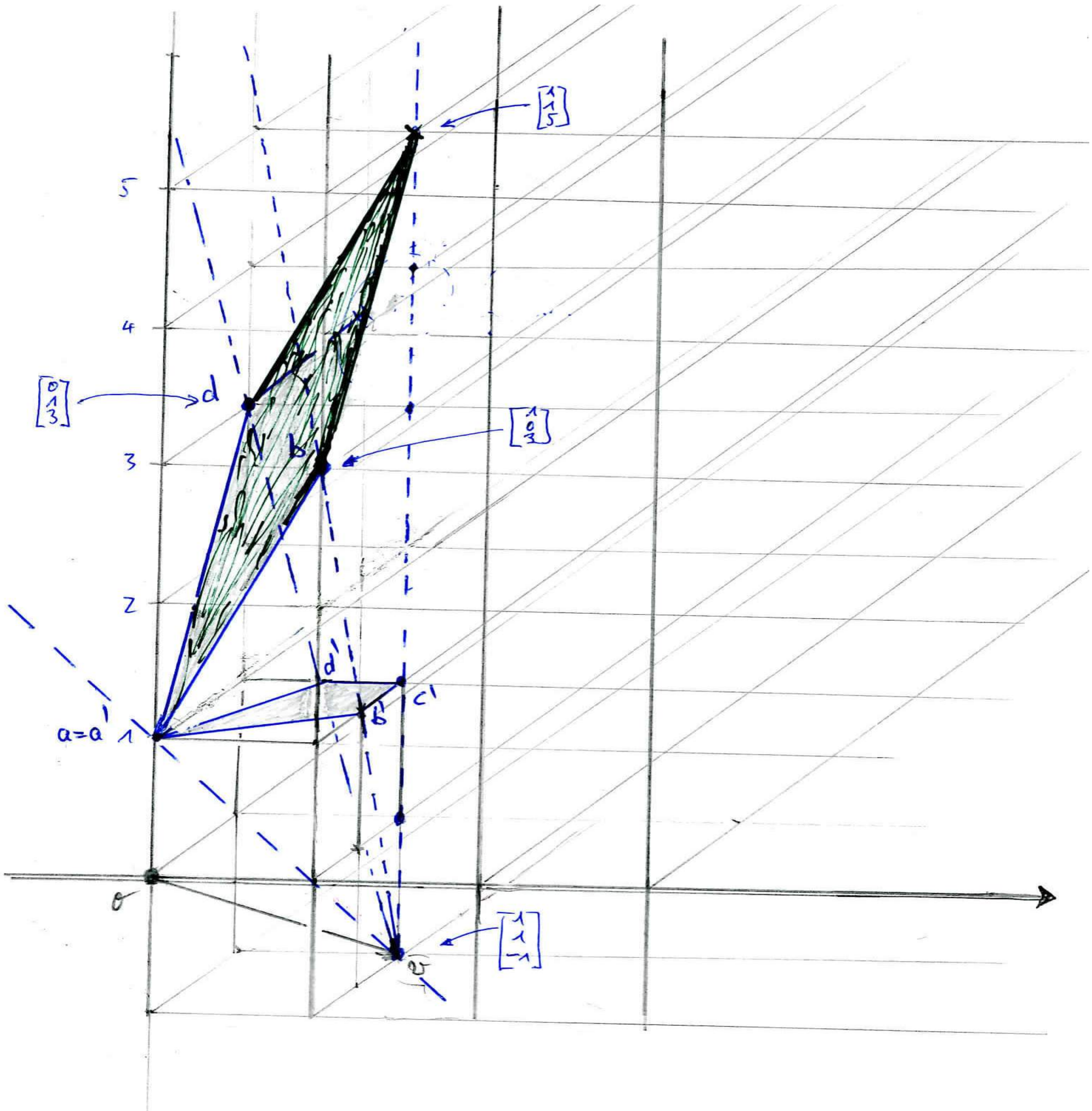
F_1 und $F2$ sind die Fluchtpunkte für die beiden Parallelenrichtungen des Parallelogramms mit den Ecken a, b, c, d. Mit ihrer Hilfe können nun die Winkel bei a und a' verglichen werden. Man erhält:

$$\cos \measuredangle(b{-}a, d{-}a) = \frac{(\!(F_1 - v\,, F_2 - v)\!)}{\| F_1 - v \| \| F_2 - v \|} = \frac{4}{5} = \frac{(\!(b' - a'\,, d' - a')\!)}{\| b' - a' \| \| d' - a' \|} = \cos \measuredangle(b'{-}a', d'{-}a')\,.$$

Beispiel für eine mögliche Lage der Punkt a, b, c, d: Seien

$$a = a' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;,\; b = -v + 2b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \; c = -2v + 3c' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \; d = -v + 2d' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \;.$$

Für diese Punkten, die man z.B. leicht konstruktiv aus einer Zeichnung gewinnen kann, ist nun noch zu bestätigen, dass sie in Frage kommen. Sie liegen jedenfalls auf Grund ihrer Definition als Affinkombinationen, auf den richtigen Strahlen durch v. Bilden sie ein Parallelogramm? Stimmt der Winkel bei a?



(30) **(a)** Sei etwa $\Gamma = a+U$ mit a aus K^{n+1} und mit einem Untervektorraum U der Dimension n. Für u aus U ist dann $f(a+u) = f(a) + \ell_f(u)$ mit der zu f gehörenden linearen Abbildung ℓ_f von U nach U. Eine lineare Abbildung ℓ in K^{n+1}, die auf Γ genau wie f abbildet, erfüllt zwangsläufig die Bedingungen:

$$\ell(a) = f(a) \text{ und } \ell(a+u) = \ell(a) + \ell(u) = f(a) + \ell_f(u) \text{ für } u \in U.$$

Es folgt $\ell_{|U} = \ell_f$. Da weiter Γ nicht durch 0 geht, ist $f(a)$ nicht aus U. Deswegen gilt

$$\langle f(a) \rangle_K + U = K^{n+1} \ .$$

Gibt man nun für eine lineare Abbildung ℓ von K^{n+1} vor , dass

$$\ell(a) = f(a) \ \text{ und } \ \ell_{|U} = \ell_f \ ,$$

so ist dadurch ℓ bereits eindeutig festgelegt und es ist dann zwangsläufig $\ell_{|\Gamma} = f$.

(b) Jetzt ist $U = \langle e^{(1)}, \ldots, e^{(n)} \rangle_K$. Für die Matrix A von ℓ (bezüglich der Standardbasis) muss dann gelten

$$\ell(e^{(i)}) = Ae^{(i)} \in U \ \text{ für } \ 1 \le i \le n \ \text{ und } \ \ell(e^{(n+1)}) = Ae^{(n+1)} \in \Gamma \ .$$

Daher hat A in der letzten Zeile die Einträge $[0, \ldots, 0, 1]$.

(32) **(a)** Seien $W = \mathsf{Lös}\,(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, 0)$ und $W' = \mathsf{Lös}\,(\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, 0)$. Man berechnet oder sieht direkt (verbunden mit dem Wissen, dass ja die Dimension jeweils 2 sein muss (warum?)):

$$W = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \ \text{ und } \ W' = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \ .$$

Nach Beobachtung 10.5 erhält man damit

$$\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(W') = \mathbb{P}(W \cap W') \ .$$

Der Schnitt $W \cap W'$ ergibt sich dabei als $W \cap W' = \mathsf{Lös}\,(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, 0) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Setzen wir nun $p = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dann lautet das Ergebnis für Teil (a) wie folgt

$$\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(W') = \{p\} \ .$$

(b) Nach Voraussetzung ist $p = \mathbb{R}u$, $p' = \mathbb{R}u'$, $p'' = \mathbb{R}u''$ und $p''' = \mathbb{R}u'''$. Diese vier projektiven Punkte sind genau dann komplanar, wenn $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\left(p \vee p' \vee p'' \vee p'''\right) \le 2$. Nun ist aber $p \vee p' \vee p'' \vee p''' = \mathbb{P}(\langle u + u' + u'' + u''' \rangle_{\mathbb{R}})$. Die vier projektiven Punkte sind demnach genau dann komplanar wenn die Vektoren $u, u'.u'', u'''$ aus $\mathbb{R}^4$ linear abhängig sind, also genau dann, wenn $\mathsf{det}\,[u, u', u'', u'''] = 0$.

(33) Behauptung: Über einen beliebigen Körper K sind keine drei der vier folgenden projektiven Punkte kollinear:

$$Ke^{(1)},\ Ke^{(2)},\ Ke^{(3)}, K\big(e^{(1)}+e^{(2)}+e^{(3)}\big)$$

Nachweis:
Da

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K^3) = &\quad p\vee p'\vee p'' &&= \mathbb{P}(\langle e^{(1)},e^{(2)},e^{(3)}\rangle_K \\
= &\quad p\vee p'\vee p''' &&= \mathbb{P}(\langle e^{(1)},e^{(2)},e^{(1)}+e^{(2)}+e^{(3)}\rangle_K \\
= &\quad p\vee p''\vee p''' &&= \mathbb{P}(\langle e^{(1)},e^{(3)},e^{(1)}+e^{(2)}+e^{(3)}\rangle_K \\
= &\quad p'\vee p''\vee p''' &&= \mathbb{P}(\langle e^{(2)},e^{(3)},e^{(1)}+e^{(2)}+e^{(3)}\rangle_K \ ,
\end{aligned}$$

sind keine drei der vier Punkte kollinear.

(35) A ist invertierbar, ℓ_A somit eine bijektive lineare Abbildung (Vektorraumisomorphismus). Dann ist aber $\ell_A(p)$ ein eindimensionaler Untervektorraum. Dabei ist $\ell_A(p)=Ap=f(p)$.

Nun ist noch zu zeigen, dass f mindestens einen Fixpunkt hat. Sei p aus $\mathbb{P}^2$, etwa $p=\mathbb{R}u$ mit einem von 0 verschiedenen Vektor u aus $\mathbb{R}^3$. Es gilt dann:

$$p\in \mathsf{Fix}_f \quad\Leftrightarrow\quad f(p)=p \ \Leftrightarrow\ Ap=p \ \Leftrightarrow\ \mathbb{R}(Au)=\mathbb{R}u \ \Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}:\ [\,Au=\lambda u \ \text{ und }\ \lambda\neq 0\,]$$

$\Leftrightarrow$ u ist ein Eigenvektor von A zu einem (von 0 verschiedenen) Eigenwert

$\Leftrightarrow$ $\mathsf{charpoly}(A)$ hat eine (von 0 verschiedene) Nullstelle λ und u ist Eigenvektor zum Eigenwert λ

Da A eine reelle 3×3-Matrix ist, hat ihr charakteristisches Polynom den Grad drei und somit stets eine reelle Nullstelle. Diese ist zwangsläufig von 0 verschieden, denn A ist invertierbar. Für die Abbildung f bedeutet dies alles, dass sie mindestens einen Fixpunkt haben muss.

(36) **(a)** Nach Satz 10.4 (b) schneiden sich je zwei verschiedene projektive Geraden einer projektiven Ebene in genau einem Punkt. Da z nicht auf G liegt, sind für einen Punkt p auf G die beiden Punkte z und p verschieden und ihre nach 10.4 (a) eindeutig bestimmte Verbindungsgerade $p\vee z$ ist von G' verschieden, da ja z auch nicht auf G' liegt. Der Schnittpunkt $(p\vee z)\cap G'$ ist also eindeutig bestimmt. Dieselben Überlegungen gelten auch für einem Punkt p' aus G', die Geraden $p'\vee z$ und deren Schnittpunkt p mit G. Wir können also genauso gut eine Abbildung π' von G' nach G erklären durch die Vorschrift:

$$\pi'(p')=\big(p'\vee z\big)\cap G$$

Für die beiden Abbildungen π und π' gilt nun

$$\forall p\in G, p'\in G':\quad \big[\ \pi'(\pi(p))=p \ \text{ und }\ \pi(\pi'(p'))=p'\ \big]$$

π und π' sind daher beide bijektive sich gegenseitig umkehrende Abbildungen.

(b) Ein Punkt p aus G hat die Darstellung $p=\mathbb{R}\begin{bmatrix} r\\ s\\ 0\end{bmatrix}$ mit von Null verschiedenen reellen Zahlen r,s. Nach Definition 10.6 und Beobachtung 10.7 erhält man

$$z\vee p=\mathbb{P}(\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r\\s\\0\end{bmatrix}\rangle_{\mathbb{R}})$$

Damit ergibt sich für $\pi(p)$:

$$\begin{aligned}
\pi(p) &= \mathbb{P}\big(\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}r\\s\\0\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}} \big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{ \begin{bmatrix}\lambda+\mu r\\ \lambda+\mu s\\ \lambda\end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu r = 0\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{ \begin{bmatrix}0\\ \mu(s-r)\\ -\mu r\end{bmatrix} : \mu \in \mathbb{R}\}\big) \\
&= \langle \begin{bmatrix}0\\ s-r\\ -r\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} .
\end{aligned}$$

In der Aufgabe ist $r = 4$ und $s = 5$ vorgegeben. In diesem Fall ist also

$$\pi\big(\langle \begin{bmatrix}4\\5\\0\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}\big) = \langle \begin{bmatrix}0\\1\\-4\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} .$$