Modul Geometrie 16. Februar 2008
Wintersemester 2007-2008
Schmale

Musterlösungen

(manche kurz und manche sehr ausführlich)

(3) Einige Hinweise zur Definition des Winkels zwischen zwei sich schneidenden affinen Unterräumen in $\mathbb{R}^n$.

Zunächst kann wegen der Existenz gemeinsamer Punkte bis auf eine Translation angenommen werden, dass 0 im Durchschnitt liegt, und dass wir es daher mit Untervektorräumen zu tun haben. Translationen erhalten u.A. Winkel zwischen zwei Vektoren. Wenn sich unsere Definition darauf stützt, geht also nichts verloren.

Seien nun U, W zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$.

(a) Wenn es sich dabei um Hyperebenen handelt, kann mit Hilfe von Normalenvektoren analog zum ebenen oder zum dreidimensionalen Fall vorgegangen werden. Sei $\mathsf{dim}_U = \mathsf{dim}_W = n-1$ und $U \neq W$. Seien u, w Normalenvektoren der Länge 1 von U bzw. W. Als nicht-orientierten Winkel kann man dan definieren

$$\mathsf{cos}\sphericalangle(U, W) = |\mathsf{cos}\sphericalangle(u, w)| = |\langle\!\langle u\,, w\rangle\!\rangle| \ .$$

(b) Auch für beliebige Untervektorräume kann ein Winkel definiert werden. Dies ist insbesondere von Bedeutung in Anwendungen der Theorie der Hilberträume. Gut lesbar und leicht auf endlich-dimensionale Räume reduzierbar ist die in dem folgenden Artikel auf Seite 3 unten und Seite vier wiedergegebene Definition:

Mariano Ruiz and Demetrio Stojanoff: *Frames of subspaces and operators*, 2007,
`http://arxiv.org/pdf/0706.1484v2`

Eine weitere aktuelle Referenz dazu ist: Leo Dorst, Daniel Fontijne, Stephen Mann: *Geometric Algebra for Computer Science*, Elsevier, 2007.

(5) Lösung zu **(d)**: Vorausgesetzt ist $a \neq b$, $\| a \| = \| b \| > 0$ und $H_1 = \langle a + b\rangle_{\mathbb{R}}$. Für $c = \mu(a + b)$ aus H_1 seien p, q die orthogonalen Projektionen von c auf $\langle a\rangle_{\mathbb{R}}$ bzw. auf $\langle b\rangle_{\mathbb{R}}$. M.a.W.: p und q sind die Fußpunkte der von c aus gefällten Lote auf die Geraden G_1 und G_2. Ich berechne

$$\begin{aligned} p &= \frac{\langle\!\langle c\,,a\rangle\!\rangle}{\| a \|^2} \cdot a &= \mu\frac{\left(\| a \|^2 + \langle\!\langle a\,, b\rangle\!\rangle\right)}{\| a \|^2} \cdot a \\ q &= \frac{\langle\!\langle c\,,b\rangle\!\rangle}{\| b \|^2} \cdot b &= \mu\frac{\left(\langle\!\langle a\,, b\rangle\!\rangle + \| b \|^2\right)}{\| b \|^2} \cdot b \end{aligned}$$

Da a und b gleich lang sind, erhalte ich $p = \lambda\mu a$ und $q = \lambda\mu b$ mit

$$\lambda = \left(1 + \langle\!\langle \frac{a}{\| a \|^2}\,, \frac{b}{\| b \|^2}\rangle\!\rangle\right) .$$

Für die uns interessierenden Abstände ergibt sich jetzt nach einer kurzen Rechnung und unter Beachtung der Längengleichheit von a und b

$$\boldsymbol{\| c - p \|^2} = \mu^2\| (a + b) - \lambda a \|^2 = \mu^2\| (a + b) - \lambda b \|^2 = \boldsymbol{\| c - q \|^2} .$$

(9) Lösung zur Aufgabe in der folgenden Form:

Seien $W = \langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, P_W *die orthogonale Projektion auf* W *und* $a' = P_W(a)$, $b' = P_W(b)$. *Bestimmen Sie* $a, b \in \mathbb{R}^3$ *derart, dass* a, b *linear unabhängig sind,* $(\!(a', b')\!) \neq 0$ *und doppelt so groß ist wie* $(\!(a, b)\!)$.

Zur expliziten Beschreibung von P_W berechne ich zuerst eine orthogonale Basis (w_1, w_2) von W. Ein mögliches Ergebnis ist:

$$w_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Ein Erzeuger des Orthogonalraums $W^\perp$ ist z.B. $w_3 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$, und damit ist (w_1, w_2, w_3) eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Nun können durch Probieren geeignete Vektoren gefunden werden, etwa so:

Bestimme λ derart, dass mit

$$a = w_1 + \lambda w_3, \; b = w_1 + w_2 + \lambda w_3$$

für die Projektionen $a' = P_W(a), b' = P_W(b)$ gilt:

$$(\!(a', b')\!) = 2 \; (\!(a, b)\!).$$

Man findet dann als Lösung z.B. $\lambda = \sqrt{7/3}$.

(10) **(a)** Zunächst gilt

$$p = a + \frac{b-a}{2}, \; q = b + \frac{c-b}{2}, \; r = c + \frac{d-c}{2}, \; s = d + \frac{a-d}{2} \; .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} 2p - 2q &= 2a + b - a - 2b - c + b &&= a - c \\ 2r - 2s &= 2c + d - c - 2d - a + d &&= c - a \end{aligned}$$

m.a.W. $p - q \mid\mid r - s$ und entsprechend auch $p + \mathbb{R}(q-p) \mid\mid r + \mathbb{R}(s-r)$. Genauso lässt sich zeigen: $q + \mathbb{R}(r-q) \mid\mid r + \mathbb{R}(p-s)$.

(b) Jetzt sind a, b, c als gegeben zu betrachten und d ist geeignet zu wählen.Wann gilt zusätzlich

(i) $p - s \perp r - s$, (ii) $r - q \perp p - q$, (iii) $s - r \perp q - r$, (iv) $s - p \perp q - p$?

Dabei ist $p - s = 1/2(b-d), r - s = 1/2(c-a), r - q = 1/2(b-d), p - q = 1/2(a-c)$.

Man sieht leicht, dass im vorliegenden Fall alle vier Bedingungen äquivalent sind. Es genügt also (i) zu betrachten und (i) ist genau dann erfüllt, wenn

$$(\!(b - d, c - a)\!) = 0 \quad \text{bzw. wenn} \quad (\!(b, c-a)\!) = (\!(d, c-a)\!),$$

bzw. wenn

$$d \in b + (c-a)^{\perp} \tag{1}$$

Damit ein Quadrat vorliegt, müssen außerdem die Seitenlängen übereinstimmen. Dies ist hier genau dann der Fall, wenn $\| a - c \| = \| b - d \|$, bzw. wenn $\| a - c \| = \| b - d \|$. Dies wiederum bedeutet

$$d \in K_{b, \| c-a \|}, \tag{2}$$

der Kugeloberfläche der Kugel um b mit Radius $\| a - c \|$ liegen muss. (1) und (2) zusammen beschreiben den geometrischen Ort der Punkte d mit der Eigenschaft, dass das Seitenmittenviereck mit den Ecken a, b, c, d ein Quadrat wird.

(12) Das gegebene Tetraeder sei beschrieben durch die drei Vektoren

$$a = \alpha e^{(1)}, b = \beta e^{(2)}, c = \gamma e^{(3)}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$

Die Summen der Längenquadrate gegenüberliegender Seiten sind dann

$$(\!(a\,,a)\!) + (\!(b-c\,,b-c)\!)\,,\,(\!(b\,,b)\!) + (\!(c-a\,,c-a)\!)\,,\,(\!(c\,,c)\!) + (\!(b-a\,,b-a)\!)$$

Da die drei Vektoren a, b, c paarweise orthogonal sind, fallen die gemischten Skalarprodukte weg und es ergibt sich Gleichheit der drei Summen.

(14 neu) Seien K ein Körper und etwa $F = f_0 + \langle f_1, f_2 \rangle_K$. Da sich E und F in einer Graden schneiden sollen, kann o.E. angenommen werden, dass

$$E \cap F = f_0 + K f_1$$

und dann

$$E = f_0 + \langle f_1, f_3 \rangle_K \;\; .$$

Wir können o.E. annehmen, dass $f_0 = 0$, denn es gilt für $a \in E$:

$$\pi(a) = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_0(a - f_0) = \varnothing$$

mit $\pi_0 = T_{-f_0} \circ \pi \circ T_{f_0}$. **Sei also ab jetzt $f_0 = 0$.** E und F sind dann zweidimensionale Untervektorräume von K^3, deren Summe K^3 ergibt.

(a) Die Aussage in (a) beruht auf folgender Beobachtung:
Seien U ein Untervektorraum der Dimension 2 von K^3, $z \in K^3 \setminus U$ und $v \in K^3$, dann gilt:

$$z + Kv \cap U \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad v \notin U \tag{3}$$

Der kurze Beweis folgt weiter unten.

Mit Hilfe dieser Beobachtung sieht man sofort, dass die Menge der Punkte auf E, wo $\pi(a) = \varnothing$, sich wie folgt darstellen lässt:

$$\{a \in E : \; a - z \in F \;\} = (z + F) \cap E \; .$$

$(z + F) \cap E$ ist aber aus Dimensionsgründen eine Grade (Nachweis).

Beweis von (3):
$\Rightarrow$: Wenn $(z + Kv) \cap U \neq \varnothing$, dann gibt es $\lambda \in K$ und $u \in U$ derart, dass $z + \lambda v = u$. Wäre $v \in U$, dann auch z, im Widerspruch zur Wahl von z.
$\Leftarrow$: Wenn $v \notin U$, dann ist $Kv + U = K^3$ und es gibt $\lambda \in K$ und $u \in U$ derart, dass $z + \lambda v = u$, m.a.W.: derart, dass $z + Kv \cap U \neq \varnothing$. □

(b) Bei näherer Betrachtung erkennt man, dass nur die Rollen von F und E zu vertauschen sind, um (b) aus (a) zu erhalten.

(15 neu) Seien K ein Körper, $a^{(0)}, \dots, a^{(n)}$ paarweise verschiedene Punkte in K^n, die nicht in einer Hyperebene liegen und für $1 \leq j \leq n$

$$\Gamma_{0,j} = \frac{a^{(0)} + a^{(j)}}{2} + \left(a^{(0)} - a^{(j)}\right)^{\perp} .$$

Zu zeigen ist:

$$\mathsf{dim}_K \Big(\bigcap_{j=1}^{n} \Gamma_{0,j} \Big) = 0 .$$

<u>Beweis:</u> Es gilt für $x \in K^n$:

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} \Gamma_{0,j} \iff \left(x - \frac{a^{(0)} + a(j)}{2}\right) \perp \left(a^{(0)} - a^{(j)}\right) \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\iff \langle\!\langle x \, , a^{(0)} - a^{(j)} \rangle\!\rangle = \frac{1}{2} \left(\| \, a^{(0)} \, \|^2 + \| \, a^{(j)} \, \|^2 \right) \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} a^{(0)} - a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(0)} - a^{(n)} \end{bmatrix}}_{=:\, A} \cdot x \;=\; \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \| \, a^{(0)} \, \|^2 + \| \, a^{(1)} \, \|^2 \\ \vdots \\ \| \, a^{(0)} \, \|^2 + \| \, a^{(n)} \, \|^2 \end{bmatrix}}_{=:\, b} \tag{4}$$

Auf Grund der Voraussetzungen über die Punkte $a^{(j)}$ ist die Matrix A invertierbar. Daher besitzt das Gleichungssystem (4) genau eine Lösung x. □

(17) Da Kongruenz durch Bewegungen hergestellt wird, können wir die Konfiguration durch Bewegungen beliebig verändern, bevor wir die in der Aufgabe gestellte Frage beantworten.

Als Erstes halten wir fest, dass alle Punkte aus $D \cup D'$ koplanar sind. Sei E eine Ebene mit $D \cup D' \subseteq E$. Eine Bewegung von E kann zu einer Bewegung von $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden, z.B. durch eine Verschiebung, derart, dass $0 \in E$ und dann durch Fixierung eines Normalenvektors. Wir beschränken daher die weiteren Überlegungen auf E.

Als Nächstes stellen wir fest (begründen), dass o.E. $a = 0$ angenommen werden kann. E wird dann ein Untervektorraum. Wir betrachten also ab jetzt

$$D = \{0, a, b\} \text{ und } D' = \{\frac{1}{2}b \, , \frac{1}{2}(b+c) \, , \frac{1}{2}c\}$$

Danach beobachten wir, dass $D_- = \{ \, 0, -b, -c\}$ und D kongruent sind im Sinne der Definition am Anfang von § 3 mittels der Bewegung $-I$ mit $-I(x) = -x$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Schließlich ist dann noch $T_{-\frac{1}{2}(b+c)}(2D') = \{-c, 0, -b\} = -D$.

Wenn dabei die Ecken des Dreiecks D in der Reihenfolge $(0, b, c)$ bzw. $(0, -b, -c)$ nummeriert waren, dann sind sie am Ende in der Reihenfolge $(-c, 0, -b)$ nummeriert, woraus sich die erforderliche Eckenpermutation ergibt.

(18) Die Aussage der Aufgabe bleibt auch für affine Abbildungen gültig. Sei f eine affine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ und gelte $f = T_v \circ f_0$ mit geeigneten $v \in \mathbb{R}^n, f_0 \in \mathsf{End}\,(\mathbb{R}^n)$. Ferner seien $\Gamma = u + U, \Gamma' = u' + U'$ zwei parallele Unterräume in $\mathbb{R}^n$. O.E. gelte $U \subseteq U'$.

Zunächst beobachten wir folgende Eigenschaften (Nachweis folgt weiter unten):

$$f(\Gamma) = T_v(f_0(\Gamma)) = (v + f_0(u)) + f_0(U) \tag{5}$$

und analog

$$f(\Gamma') = T_v(f_0(\Gamma')) = (v + f_0(u')) + f_0(U') \ .$$

Da $U \subseteq U'$ ist $f(U) \subseteq f(U')$ und, da f_0 linear ist, sind $f(U)$ und $f(U')$ Untervektorräume. $f(\Gamma)$ und $f(\Gamma'$ sind daher parallel.

Nachweis von (5): Für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$y \in f(\Gamma) \Leftrightarrow \exists w \in U : \ y = f(u+w) \Leftrightarrow \exists w \in U : \ y = v+f_0(u+w) \Leftrightarrow y \in (v+f_0(u))+f_0(U)$$

(19) Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ und eine Bewegung f von $\mathbb{R}^n$ gilt (Nachweis folgt weiter unten):

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \tag{6}$$

Seien die Strecken $S = [a, b]$ und $S' = [a', b']$ kongruent und f eine Bewegung mit $f(S) = S'$ und etwa $= T_v \circ f_0$ mit einem $v \in \mathbb{R}^n$ und einem $f_0 \in\mathcal{O}(n)$. Für $x = \lambda a + \mu b \in S$ mit $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu = 1$ ist

$$F(x) = v + \lambda f_0(a) + \mu f_0(b) = \lambda(v + f_0(a)) + \mu(v + f_0(b)) = \lambda f(a) + \mu f(b) \ .$$

Es folgt $S' = [f(a), f(b)]$ und, da f eine Bewegung ist, $\| \ b - a \ \| \ = \| \ f(b) - f(a) \ \|$.

Seien nun umgekehrt die Strecken S und S' gleich lang, also $\| \ b - a \ \| \ = \| \ b' - a' \ \| = \ell$.

Ich konstruiere eine Bewegung f mit $f(S) = S'$ wie folgt:

Verschiebung beider Strecken in den Nullpunkt mit T_a und $T_{-a'}$.
Anwendung von (6) ergibt dann $T_{-a}(S) = [0, b - a], T_{a'}([0, b' - a']) = S'$.
$b - a$ und $b' - a'$ sind zwei gleich lange Vektoren. Es gibt daher ein $f_0 \in\mathcal{O}(n)$ mit $f_0(b - a) = f_0(b' - a')$ (ausführen).
Insgesamt ergibt sich mit $f = T_{a'} \circ f_0 \circ T_{-a}$ eine Bewegung mit $f(S) = S'$.

Nachweis von (6) für Affinitäten: Sei $f = T_v \circ \ell$ eine Affinität des $\mathbb{R}^n$. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$f(\lambda a + \mu b) = v + \lambda \ell(a) + \mu \ell(b) \ .$$

Wenn zusätzlich $\lambda + \mu = 1$, dann folgt

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b) \ . \tag{7}$$

Letzteres folgt insbesondere auch, wenn $\lambda, \mu \geq 0$. Daher gilt

$$f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)] \ .$$

Mit Hilfe von (7) ist nun noch die Surjektivität von $f_{|_{[a,b]}}$ nachzuweisen. □

(22) Der Teil „$(a) \Leftrightarrow (b)$“ von Satz 1 in § 7 führt zu einer nahe liegenden Lösung, die insbesondere auch die Voraussetzung über K benötigt. Es geht aber auch so:

Wenn $|M| = 1$, dann ist $\varnothing = M_1 = M_2$ und wenn $|M| \geq 2$, und a, b, c, kollinear, dann ist $|M_1|$ eine Grade und $|M_1| = |M_2|$. In beiden Fällen ist also M_2 ein affiner Unterraum.

Wir können also o.E. annehmen, dass die drei Punkte a, b, c nicht kollinear sind. Insbesondere ist dann $|M| = 3$.

Außerdem sind dann z.B. $b - a$ und $c - a$ K-linear unabhängig.

Behauptung: $M_2 = a + \langle b - a, c - a\rangle_K$. Nachweis: Sei $y = a + \varrho(b - a) + \sigma(c - a)$ mit $\varrho, \sigma \in K$. Ich bestimme nun $p \in a \vee b$ und $q \in a \vee c$ derart, dass $y \in p \vee q$. Punkte $p \in a \vee b, q \in a \vee c$ haben die Darstellungen

$$p = a + \lambda(b - a),\ q = a + \mu(c - a) \text{ mit } \lambda, \mu \in K\ .$$

$p \vee q$ hat dann die Darstellung

$$p \vee q = \{p + \nu(q - p) :\ \nu \in K\}$$

Wenn $y \in p \vee q$, dann muss mit geeigneten $\lambda, \mu, \nu \in K$ und bei gegebenen $\varrho, \sigma \in K$ gelten

$$a + \lambda(b - a) + \nu\big(a + \mu(c - a) - (a + \lambda(b - a))\big) = a + \rho(b - a) + \sigma(c - a)\ ,$$

bzw.

$$(\lambda - \nu\lambda - \varrho)(b - a) = (\sigma - \nu\mu)(c - a)\ .$$

Da $(b - a), (c - a)$ K-linear unabhängig sind, folgt

$$\sigma = \nu\mu\ , \quad \varrho = (1 - \nu)\lambda \tag{8}$$

Wenn K mehr als zwei Elemente enthält[1], dann kann ν beliebig von 0,1 verschieden gewählt werden um λ, μ aus (8) wie folgt zu bestimmen:

$$\lambda = \nu^{-1}\sigma\ , \quad \lambda = (1 - \nu)^{-1}\varrho\ .$$

Nun betätigt man in umgekehrter Richtung durch Einsetzen, dass mit den so bestimmten λ, μ, ν tatsächlich $y \in p \vee q$.

Damit ist die Inklusion $\underbrace{a + \langle b - a, c - a\rangle_K}_{=:\,E} \subseteq M_2$ gezeigt.

E ist aber ein affiner Unterraum, der M und damit nach Satz 1 in § 7 auch M_1 und M_2 enthält. Es folgt also $E = M_2$ und M_2 ist ein affiner Unterraum.

(23) Ein Untervektorraum von V, der von $\{0\}$ verschieden ist, hat mindestens die Dimension 1. M soll nicht leer sein, also mindestens ein Element enthalten. Seien also $m \in M$ und U ein eindimensionaler Untervektorraum von V.

Da $T_u(M) \subseteq M$ für alle $u \in U$ gefordert ist, muss gelten

$$m + u \in M \text{ für alle } u \in U\ ,$$

bzw.

$$m + U \subseteq M\ .$$

Wenn andererseits mit einem $m \in V$ die Menge M gegeben ist als $M = m + U$, (Grade mit Richtung U) dann ist $T_u(M)$ genau dann in M enthalten, wenn $u \in U$, bzw. wenn $\{u \in V :\ T_u(M) \subseteq M\} = U$.

M muss demnach mindestens einen eindimensionalen affinen Unterraum enthalten. Ein solcher ist stets gleich mächtig wie K.

[1] Dies ist z.B. aber nicht nur der Fall, wenn $\mathsf{char}\,(K) \neq 2$.

(24) **(a)** Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (g - a(k)) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k) g - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a^{(k)} \quad \Longleftrightarrow \quad g = \frac{1}{\underbrace{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k)}_{\neq 0}} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a^{(k)})$$

Setzt man g entsprechend fest, so ist g eindeutig bestimmt.

(b)

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a^{(k)} - \left(\sum_{j=1}^{r} \Big(\frac{1}{\sum_{k \in I_j} \alpha_k} \sum_{k \in I_j} \alpha_k a^{(k)} \Big) \Big(\sum_{k \in I_j} \alpha_k \Big) \right) \frac{1}{\big(\sum_{j=1}^{r} \sum_{k \in I_j} \alpha_k \big)} = 0$$

(26) Wenn die Abbildung $f: \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ affin ist, dann hat f eine Darstellung $f = T_{f(a) - \ell(a)} \circ \ell$ mit $\ell \in \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{C}$. M.a.W.: für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = \underbrace{f(a) - \lambda a}_{=:\, v} + \lambda z \quad \text{mit einem } \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

oder in Matrixform und mit der Interpretation von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$:

$$f(z) = v + \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}}_{=:\, A} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \ \text{wobei } \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \ .$$

Man erkennt daran, dass nur schiefsymmetrische reelle 2×2-Matrizen A bei der Darstellung komplex affiner Abbildungen zur Anwendung kommen.

Sei daher als Beispiel für die Aufgabe $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dann ist die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, z \longmapsto Az$$

bzw. in komplexer Schreibweise

$$f: \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, z_1 + z_2 i \longmapsto z_2$$

zwar affin als $\mathbb{R}$-lineare reelle Abbildung, aber nicht als Abbildung von $\mathbb{C}$.

Dies kann auch nochmal wie folgt direkt bestätigt werden:

Wäre $f(z) = v + \lambda z$ mit $v, \lambda \in \mathbb{C}$ und für $z \in \mathbb{C}$, dann würde folgen $f(0) = v = 0$ und $0 = f(1) = v + \lambda = \lambda$, also auch $\lambda = 0$. Dann müsste aber auch $f(i) = 0 + 0 \cdot i = 0$ sein im Widerspruch zu $f(i) = 1$.

(27) Siehe Anleitung.

(29) Ich benutze die Bezeichnungen von Satz 1 in § 9. Seien jetzt Λ, Λ' verschiedene parallele Graden, die nicht parallel zu Γ_1 sind etwa mit den folgenden Darstellungen

$$\Lambda = a + Ku, \Lambda' = a' + Ku, \Gamma_1 = b_1 + Kv \ .$$

Die Voraussetzungen implizieren

$$a' \notin \Lambda \quad \text{und} \quad u, v \ K\text{-linear unabhängig.}$$

Zu $x \in \Lambda$ sei x' der Schnittpunkt der Parallelen $\Gamma_x = x + Kv$ zu Γ_1 durch x mit Λ'. Mit $v = x' - x$ sei T_v die entsprechende Translation von K^2.

Behauptung: $\quad T_{v|_\Lambda} : \quad \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ ist eine Bijektion.

Beweis: Für $x \in \Lambda$ und $\lambda \in K$ ist $T_v(x + \lambda u) = x' - x + x + \lambda u = x' + \lambda u \in \Lambda'$ und die Injektivität und Surjektivität ergeben sich unmittelbar aus dieser Darstellung. $\square$

Mit der Affinität T_v von K^2 kann nun der Beweis des Satzes von Thales für den Fall „ $\Lambda \parallel \Lambda'$ “ analog zum Beweis von Satz 1 in § 9 geführt werden.

(30) **(a)** Auf Grund unserer Definition konvexer Mengen wissen wir, dass zu je zwei Punkten $a, b \in C$ auch deren Verbindungsstrecke $[a, b]$ ganz in C liegt.
seien nun $a, b \in H_1 \cup H_2$ mit der Eigenschaft

$$a \notin H_2, b \notin H_1 \ .$$

Da nach Voraussetzung die Hyperebenen H_1, H_2 verschieden sein sollen, muss es solche Punkte geben. Die Fälle $H_1 \subseteq H_2$ oder $H_2 \subseteq H_1$ sind ausgeschlossen. Sei etwa $H_1 = a + U_1$.
Wenn $\dfrac{a+b}{2} \in H_1 = a + U_1$, dann ist $\dfrac{a+b}{2} = a + u$ mit $u \in U_1$, und es folgt $\dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{2} + u$, bzw. $b = a + 2u \in H_1$ im Widerspruch zur Wahl von b.
Wenn $\dfrac{a+b}{2} \in H_2$ ergibt sich auf die gleiche Weise ein Widerspruch.
Aus dem Gezeigten folgt:
Sobald C einen Punkt aus $H_2 \backslash H_1$ enthält, kann C keinen Punkt aus $H_1 \backslash H_2$ enthalten. Es muss dann C in H_2 enthalten sein. Das Gleiche trifft zu bei Vertauschung von H_1 und H_2.
Wenn $C \subseteq H_1 \cap H_2$, dann ist nichts mehr zu zeigen.

(b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass sowohl die Kreisscheibe $K = \{\ x \in \mathbb{R}^2 : \ \| x \| \leq 1\}$ als auch ihr Inneres $\overset{\circ}{K} = \{\ x \in \mathbb{R}^2 : \ \| x \| < 1\}$ konvexe Mengen sind. Außerdem möchte ich folgende Eigenschaft benutzen (Nachweis weiter unten):

$$\forall\ a, b \in K : \quad]a, b[\ \subseteq \overset{\circ}{K} \tag{9}$$

Damit ist der Aufgabenteil (b) ganz einfach zu erledigen. Sei M eine Menge mit der Eigenschaft $\overset{\circ}{K} \subseteq M \subseteq K$ und seien $a, b \in M$. Zu zeigen ist: $[a, b] \subseteq M$.
Da $[a, b] = \{a, b\} \cup\ ]a, b[$ und $\overset{\circ}{K} \subseteq M$, ist nach (9) in jedem Fall $[a, b] \subseteq M$.
Nachweis von (9): Seien $a \neq b$ und $x \in]a, b[$ und etwa $x = \lambda a + \mu b$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda + \mu = 1$. Dann ist

$$\| x \| \leq \lambda \| a \| + \mu \| b \| \leq 1$$

Sobald $a \in \overset{\circ}{K}$ oder $b \in \overset{\circ}{K}$ wird dabei $\| x \| < 1$. Wenn sowohl a als auch b die Länge 1 haben, dann kann dennoch x nicht die Länge 1 haben, denn dann würde gelten

$$1 = \| x \| = \| \lambda a + \mu b \| = \lambda \| a \| + \mu \| b \|,$$

was nur möglich ist, wenn a, b linear abhängig sind, also in unserem Fall $a = b$ entgegen unseren Voraussetzungen oder $a = -b$ gilt. Im letzteren Fall ist $\| x \| = |\lambda - \mu| < 1$, denn $\lambda, \mu \in]0, 1[$. $\square$

(31) Bemerkungen zu (31 c): Gesucht ist eine konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften $C \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$ und C maximal bezüglich $\subseteq$.

Neben dem durch geeignete Randpunkte erweiterten offenen Quadrat

$$\{\ (x_1, x_2) :\ x_1, x_2\ \in\ ]\text{-}1, 1[\ \ \}$$

gibt es noch viele andere Lösungen, so z.B. das Innere der konvexen Hülle der Punkte

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

wiederum erweitert durch geeignete Randpunkte, oder analog mit den Punkten

$$(1, 0), (1, 2), (-1, 0), (-1 - 2)\ ,$$

oder mit

$$(a + 1, 1), (a - 1, 1), (-a, -1), (-a + 1, 1) \quad \text{und einem} \quad a \in n\mathbb{N}_+\ .$$

Ein ganz anderer Typ von Beispielen benutzt die Existenz von Graden durch 0, die keine weiteren Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ enthält, wie z.B. $\mathbb{R} \cdot (1, \sqrt{2})$.

(33) **(a)** $\mathscr{C}$ ist als konvexe Menge vorausgesetzt.

$\underline{\Rightarrow:}$ Seien $a, b \in \mathscr{C} \setminus \{c\}$, wobei c eine Ecke von $\mathscr{C}$ ist. Dann ist $[a, b] \subseteq \mathscr{C}$. Wäre nun $c \in [a, b]$, dann müsste $c = a$ oder $c = b$ gelten, was ausgeschlossen wurde. Es folgt $[a, b] \subseteq \mathscr{C} \setminus \{c\}$.

$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $c \in [a, b]$ mit gewissen $a, b \in \mathscr{C}$. Wenn $c \neq a$ und $c \neq b$, dann sind $a, b \in \mathscr{C} \setminus \{c\}$, aber $[a, b] \not\subseteq \mathscr{C} \setminus \{c\}$ im Widerspruch zur Konvexität von $\mathscr{C} \setminus \{c\}$.

(b) Seien $a, b \in \mathscr{C}\,(c^{(0)}, \ldots, c^{(r)})$, etwa

$$a = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i c^{(i)},\ \ b = \sum_{i=0}^{r} \beta_i c^{(i)}\ ,$$

und sei $c^{(k)} \in [a, b]$ für ein $k \in \{1, \ldots, r\}$, etwa

$$c^{(k)} = \alpha a + \beta b\ .$$

Dabei gelten die Relationen

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i = \sum_{i=0}^{r} \beta_i = \alpha + \beta = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_i, \beta_i, \alpha, \beta \geq 0\ .$$

Einsetzen ergibt

$$c^{(k)} = \sum_{i=0}^{r} \big(\underbrace{\alpha\alpha_i + \beta\beta_i}_{=:\ \gamma_i}\big) c^{(i)} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{r} \gamma_i = 1\ ,$$

oder umgeformt

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{r} \gamma_i (c^{(i)} - c^{(k)}) = 0\ .$$

Da die Punkte $c^{(i)}, \ldots c^{(r)}$ affin unabhängig sind, folgt: $\gamma_i = 0$ für $i \neq k$.
Wenn dann $\alpha \neq 0$ und auch $\beta \neq 0$, dann folgt $\alpha_i = 0 = \beta_i$ für $i \neq k$, also $a = b = c^{(k)}$.
Wenn $\alpha = 0$, dann ist $\beta = 1$ und es folgt $\beta_i = 0$ für $i \neq k$ und $b = c^{(k)}$.
Wenn $\beta = 0$, dann ist $\alpha = 1$ und es folgt $\alpha_i = 0$ für $i \neq k$ und $a = c^{(k)}$.

(36) (a) α ist injektiv und nicht linear (leicht zu bestätigen). α ist affin, denn für alle $a = {}^{\mathsf{t}}(a_1, \ldots, a_n)$, $b = {}^{\mathsf{t}}(b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ gilt

$$\alpha(b) - \alpha(a) = \begin{bmatrix} b-a \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\ell}(b) - \boldsymbol{\ell}(a)$$

mit der linearen Abbildung

$$\boldsymbol{\ell} : \; K^n \longrightarrow K^{n+1}, \; x \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(b) Sei $H = \alpha(K^n)$, $\beta : H \longrightarrow H$ eine affine Abbildung und $\boldsymbol{\ell}' : \; \vec{H} \longrightarrow \vec{H}$ die zugehörige lineare Abbildung (nach Satz 2 in § 8). Dabei ist

$$\vec{H} = K^n \times \{0\} = \{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : \; x \in K^n \; \} .$$

Sei nun $\boldsymbol{\ell}$: $K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ wie folgt erklärt

$$\boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}'(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}) + x_{n+1} \cdot \beta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) .$$

Durch Nachrechnen stellt man fest, dass $\boldsymbol{\ell}$ linear ist und dass $\boldsymbol{\ell}_{|_{\vec{H}}} = \boldsymbol{\ell}'$ und dass insbesondere $\boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \beta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$. Außerdem gilt $\boldsymbol{\ell}(H) \subseteq H$. Schließlich ist für $b \in K^n$

$$\beta(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}) - \boldsymbol{\beta}(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}'(\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}}_{\notin \vec{H}} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in \vec{H}}) = \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}) - \boldsymbol{\beta}(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}) .$$

Es folgt $\beta(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix})$ für alle $b \in K^n$, bzw. für alle $\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \in H$.
Sei nun $\boldsymbol{\ell} : K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ linear und $\boldsymbol{\ell}(H) \subseteq H$. Für $a, b \in K^n$ ist dann

$$\boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}) - \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} b-a \\ 0 \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}_{|_{\vec{H}}}(\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}) .$$

$\boldsymbol{\ell}_{|_{\vec{H}}}$ ist demnach affin.

(c) Seien $(e^{(1)}, \ldots, e^{(n+1)})$ die kanonische Basis von K^{n+1} und $\boldsymbol{\ell} : \; K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\boldsymbol{\ell}(H) \subseteq H$. Da $\boldsymbol{\ell}(e^{(n+1)}) \in H$, ist $\boldsymbol{\ell}(e^{(n+1)}) = \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix}$ mit einem v aus K^n. Außerdem ist für alle $a \in K^n$

$$\boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}) = \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}) + \boldsymbol{\ell}(e^{(n+1)}) = \boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Da $\boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix})$ in H sein muss, folgt $\boldsymbol{\ell}(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix}$. Insbesondere trifft dies dann für $a = e^{(i)}, i = 1, \ldots, n$, zu. Die Matrix von $\boldsymbol{\ell}$ hat daher die Gestalt $\begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) Die in der Aufgabenstellung angegebene Untergruppe werde mit $\mathcal{U}$ bezeichnet.
Sei β eine Affinität von K^n, kurz: $\beta \in \mathcal{A}(n)$. Nach (b) gehört zu β eine lineare Abbildung $\ell_\beta : K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$. Diese ist bijektiv, wenn β dies ist(!). Die zugehörige Matrix nach (c) sei $M_\beta = \begin{bmatrix} A_\beta & v_\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Injektivität bedeutet dann, dass $A_\beta \in \mathcal{G}(n)$. Somit ist M_β aus $\mathcal{U}$.
Sei

$$\mathcal{U}' = \{\ \ell \in \mathsf{End}\,(K^{n+1}) :\ \ell \text{ injektiv },\ell(H) \subseteq H\}\ .$$

Man überlegt sich, dass $\mathcal{U}'$ eine Untergruppe von $\mathsf{End}\,(K^{n+1})$ ist und dass für $\ell \in \mathcal{U}'$ stets $\ell(H) = H$ und somit auch $\ell^{-1}(H) = H$ gilt.
Sei schießlich noch μ der aus der linearen Algebra bekannte Isomorphismus

$$\mu :\ \mathsf{End}\,(K^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{G}(n+1) = \{ \text{ invertierbare } (n+1) \times (n+1)\text{-Matrizen } \}\ ,$$

$$\ell \longmapsto \text{ Matrix von } \ell \text{ bezüglich der kanonischen Basis }.$$

<u>Behauptung:</u>

$$\varphi : \mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{U}', \quad \beta \longmapsto \ell_\beta$$

ist ein Gruppenisomorphismus. <u>Beweis</u> durch Nachrechnen.
Zusammen mit μ ergibt sich die behauptete Isomorphie.

(37) Das Newtonpolytop $\mathsf{New}(f)$ des gegebenen Polynoms f wird erzeugt von den sechs Vektoren

$$\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \alpha^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}, \alpha^{(3)} = \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \alpha^{(4)} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \alpha^{(5)} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha^{(6)} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\ .$$

Der gegebene Punkt $p = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ liegt genau dann in $\mathsf{New}(f)$, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$p = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \alpha^{(i)}\ , \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1, \tag{11}$$

und

$$\lambda_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 6\ . \tag{12}$$

(10) und (11) sind genau dann erfüllt, wenn $A\lambda = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_6\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ .$$

Man berechnet: $\quad \mathsf{Lös}\,(A,b) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{h_0} + \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 9 \\ -7 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=:\, h_2} \rangle_{\mathbb{R}}$

Nun ist aber noch die Bedingung (12) zu erfüllen.

Dies erreicht man z.B. mit der Lösung $\quad h_0 + \frac{1}{36} h_2 = \begin{bmatrix} 2/9 \\ 0 \\ 0 \\ 5/9 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}$.

Zur Probe ist nun noch $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \alpha^{(i)}$ zu errechnen um definitiv zu bestätigen, dass der Punkt p in $\mathsf{New}(f)$ liegt.

(41) Die Menge $\mathscr{B}$ der möglichen Betrachtungspunkte ergibt sich als Durchschnitt der drei Kugeln mit Durchmessern $[F_1, F_2], [F_2, F_3], [F_3, F_1]$. Eine Visualisierung des Durchschittes von 3 Kugeln mit Hilfe von Cabri3D finden Sie auf der Internetseite der Vorlesung.

Jede der Kugeln ist jeweils der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus F_1 und F_2, F_2 und F_3, bzw. F_3 und F_1 unter einem rechten Winkel gesehen werden.

Man berechnet $\mathscr{B} = \{ \begin{bmatrix} -10 \\ \sqrt{210} \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ -\sqrt{210} \\ 8 \end{bmatrix} \}$.

(42) Seien $u, v, w \in V \setminus \{0\}$ und $p = Ku$, $q = Kv$, $r = Kw \in \mathbb{P}(V)$ drei (projektive) Punkte. Nach Beobachtung 4 in § 12 ist

$$p \vee q \vee r = \mathbb{P}(Ku + Kv + Kw) = \mathbb{P}(\underbrace{\langle u, v, w \rangle_K}_{=:\, U}) \ .$$

$\mathbb{P}(U)$ ist nach Definition 2 in § 12 genau dann eine (projektive) Ebene, wenn $\mathsf{dim}_K U = 3$, wenn also u, v, w K-linear unabhängig sind.

Wenn p, q, r auf einer Graden liegen, etwa auf $\mathbb{P}(W)$ und $\mathsf{dim}_K(W) = 2$, dann sind insbesondere u, v, w Elemente von W und können daher nicht linear unabhängig sein.

(43) **(a)** Man stellt zunächst fest: Mit v ist auch λv aus C für alle reellen λ.
Mit $\mathscr{P}_C = \{ \mathbb{R}v : \ v \in C \}$ ist daher $\bigcup_{p \in \mathscr{P}_C} p = C$.

(b) Sei $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$. Ein solches H lässt sich bei der Betrachtung der durch $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$ gegebenen Fläche in $\mathbb{R}^3$ vermuten. Man sieht leicht, dass

$$H = \{ \ x \in \mathbb{R}^3 : \ \langle\!\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x \rangle\!\rangle = 2 \ \} = \{ \ x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 2 \ \} \ .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} H \cap C &= \{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 x_2 = x_3^2 \text{ und } x_1 = 2 - x_2 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^3 : \ (2-x_2)x_2 = x_3^2 \text{ und } x_1 = 2 - x_2 \} \\ &= \underbrace{\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3^2 + (x_2-1)^2 = 1 \}}_{\text{kreisförmiger Zylinder}} \cap \underbrace{\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ \text{ und } x_1 = 2 - x_2 \}}_{\text{Ebene}} . \end{aligned}$$

(44) (a) Sei f eine Projektivität von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2}$ und $\boldsymbol{\ell}\colon \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^3$ eine zu f gehörende lineare Abbildung. Es gilt für $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2}, p = \mathbb{Z}_2 u, u \neq 0$:

$$f(p) = p \Longleftrightarrow \mathbb{Z}_2 \boldsymbol{\ell}(u) = \mathbb{Z}_2 u \Longleftrightarrow u \text{ ist Eigenvektor von } \boldsymbol{\ell}$$

Fixpunkte gibt es also nur, wenn es Eigenvektoren gibt. x^3+x+1 ist ein unzerlegbares Polynom in $\mathbb{Z}_2[x]$. Die zu $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Begleitmatrix zu x^3+x+1) gehörende lineare Abbildung $\boldsymbol{\ell}_A$ ist bijektiv und besitzt keine Eigenwerte, also auch keine Eigenvektoren. Die durch $\boldsymbol{\ell}$ gegebene Projektivität

$$f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2}, \ \mathbb{Z}_2 u \longmapsto \mathbb{Z}_2 \boldsymbol{\ell}(u)$$

hat demnach keine Fixpunkte.

(b) Hat eine Projektivität f von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ zwei Fixpunkte $p_1 = \mathbb{R}u_1, p_2 = \mathbb{R}u_2, p_1 \neq p_2$, dann sind u_1, u_2 linear unabhängige (reelle !) Eigenvektoren einer zu f gehörenden linearen Abbildung $\boldsymbol{\ell}$. Ihr charakteristisches Polynom $\varphi_{\boldsymbol{\ell}}$ hat den Grad drei und zerfällt in diesem Falle in (reelle!) Linearfaktoren.
Sind die Nullstellen von $\varphi_{\boldsymbol{\ell}}$ bzw. die Eigenwerte von $\boldsymbol{\ell}$ paarweise verschieden, dann ergeben die entsprechenden Eigenräume genau drei Fixpunkte für f.
Hat einer der Eigenräume eine Dimension ≥ 2, dann hat f unendliche viele Fixpunkte.
Nur wenn es genau zwei verschiedene eindimensionale Eigenräume für $\boldsymbol{\ell}$ gibt, hat f genau zwei Fixpunkte. Ein Beispiel liefert die zu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gehörende lineare Abbildung.
Die Antwort auf die Frage der Aufgabe lautet also „ja“.
<u>Nachbemerkung 1:</u> Mit der zu A gehörenden linearen Abbildung $\boldsymbol{\ell}_A$ kann man die Frage in der Aufgabenstellung natürlich durch direkten Nachweis der geforderten Eigenschaften beantworten. Obige etwas ausführlichere Überlegungen sind aber der Hintergrund für das Auffinden eines Beispieles.
<u>Nachbemerkung 2:</u> Eine lineare Abbildung $\boldsymbol{\ell}$, die zu einer Projektivität gehört ist, wie wir wissen, nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt. Dadurch wird aber die Eigenraumstruktur nicht beeinträchtigt. Das charakteristische Polynom $\varphi_{\boldsymbol{\ell}}$ als Polynom in der Variablen x ist dabei durch f nur bis auf eine Substitution $x \mapsto \lambda x$ mit $\lambda \neq 0$ bestimmt. Durch eine solche Substitution wird die Anzahl der Nullstellen nicht beeinflusst.

(45) Zu $M \subseteq \mathbb{P}(V)$ sei $U(M) = \bigcup\limits_{q \in M} q$.

(a) Seien $E_i = U(\mathcal{G}_i), i = 1,2$. Da $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \varnothing$, ist $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Da $\mathsf{dim}_K V = 4$ und $\mathsf{dim}_K E_1 = \mathsf{dim}_K E_2 = 2$, folgt $V = E_1 \oplus E_2$. Sei etwa $p = Ku, u \neq 0$, dann gibt es eindeutig bestimmte $v_i \in E_i, i = 1,2$ derart, dass $u = v_1 + v_2$.
$\boldsymbol{\mathcal{G} := \mathbb{P}(\langle v_1, v_2\rangle_K)}$ **ist eine Grade.** Denn wenn $p \notin \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$, dann ist $u \notin E_1 \cap E_2$. Daher ist $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$. Und da $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, sind v_1, v_2 linear unabhängig.
Seien $p_1 = Kv_1, p_2 = Kv_2$.
Man überprüft nun noch, dass $\boldsymbol{p \in \mathcal{G}}$, $\boldsymbol{\mathcal{G} \cap \mathcal{G}_i = \{p_i\}, i = 1,2}$ und $\boldsymbol{\mathcal{G} = p_1 \vee p_2}$.
Ist $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt ?
Sei $\mathcal{G}'$ eine weitere Grade derart, dass $p \in \mathcal{G}'$ und $\mathcal{G}' \cap \mathcal{G}_i \neq \varnothing, i = 1,2$ und seien $p_i' \in \mathcal{G}' \cap \mathcal{G}_i, i = 1,2$, etwa $p_i' = Kv_i', i = 1,2$. Insbesondere ist $\boldsymbol{\mathcal{G}' = p_1' \vee p_2'}$. Außerdem ist $v_i' \in E_i, i = 1,2$, $U(\mathcal{G}') = \langle v_1', v_2'\rangle_K$ und, da $p \in \mathcal{G}'$, muss mit $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ gelten: $u = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2'$. Da aber $V = E_1 \oplus E_2$ ist zwangsläufig $\lambda_1 v_1' = v_1$ und $\lambda_2 v_2' = v_2$. M.a.W.: es ist $\boldsymbol{p_i = p_i', i = 1,2}$ und somit $\boldsymbol{\mathcal{G} = \mathcal{G}'}$.

(46) Nach Satz 8 in § 14 ist durch die vorgegebenen Bildpunkte die Projektivität f eindeutig festgelegt. Bei der Bestimmung von $f(p)$ gehe ich vor wie im Beweis dieses Satzes.

Sei ℓ ein zu f gehörender Isomorphismus von $\mathbb{R}^3$. Es muss dann mit geeigneten $\lambda_0, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\ell(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) = \lambda_0 w^{(0)}, \ell(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) = \lambda_1 w^{(1)}, \ell(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \lambda_2 w^{(2)}, \ell(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}) = \lambda_3 w^{(3)} \ .$$

Die letzte Bedingung besagt mit Hilfe der ersten drei Bedingungen und der Linearität von ℓ:

$$\begin{aligned}\ell(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}) &= \lambda_0 w^{(0)} + \lambda_1 w^{(1)} + \lambda_2 w^{(2)} \\ &= \lambda_3 w^{(3)} = \lambda_3(-w^{(0)} - w^{(1)} - w^{(2)}) \\ &= (-\lambda_3) w^{(0)} + (-\lambda_3) w^{(1)} + (-\lambda_3) w^{(2)} \ .\end{aligned}$$

Da $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}$ linear unabhängig sind, ergibt sich:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 \ .$$

Ich wähle nun $\lambda_3 = -1$, dann ist $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. ℓ bzw. die Matrix von ℓ bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ sind nur bis auf einen reellen Faktor $\neq 0$ bestimmt durch f. Bei unserer Wahl von λ_3 ergibt sich die folgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} w^{(0)} & w^{(1)} & w^{(2)} \end{bmatrix} \ .$$

Damit erhalte ich

$$f(p) = \mathbb{R} \cdot A \cdot \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \mathbb{R} \cdot (2w^{(0)} - w^{(1)} + 2w^{(2)}) = \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix}-1\\5\\-1\end{bmatrix} \ .$$