Modul Geometrie 22. Oktober bis 5. November 2007

Wintersemester 2007-2008

Schmale

Anfangsübungen und Aufgaben zu §1 in Kapitel I : Wiederholungen aus der linearen Algebra an Hand vorwiegend einfacher analytisch-geometrischer Aufgabenstellungen.

(1) Den Winkel definieren zwischen zwei eindimensionalen affinen Unterräumen (Graden) Γ_1, Γ_2, die sich in einem Punkt schneiden.

(2) Den Winkel definieren zwischen zwei zweidimensionalen affinen Unterräumen (Ebenen), die sich in einer Graden schneiden.

(3) (2P) Den Winkel definieren zwischen zwei sich schneidenden und verschiedenen affinen Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$.
Frage: Wie könnte der Winkel zwischen zwei beliebigen nicht ineinander enthaltenen affinen Unterräumen in $\mathbb{R}^n$ definiert werden ?

(4) Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, von denen aus die Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ $(a \neq b)$ unter einem rechten Winkel erscheinen, ist die Kugel(-oberfläche) um $s = (a+b)/2$ mit Radius $r = |a - s|$.

(5) (3P) Seien a, b zwei verschiedenen Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ gleicher positiver Länge, $G_1 = \langle a \rangle_{\mathbb{R}}$, $G_2 = \langle b \rangle_{\mathbb{R}}$. Seien weiter $H_1 = \langle a+b \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda(a+b) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $H_2 = \langle a-b \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda(a-b) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie

(a) $H_1 \perp H_2$

(b) H_1, H_2 sind unabhängig von der Wahl längengleichen Paares a, b.

(c) $\sphericalangle(G_1, H_i) = \sphericalangle(G_2, H_i)$ für $i = 1, 2$. M.a.W.: H_1, H_2 sind die beiden Winkelhalbierenden des Geradenpaares G_1, G_2.

(d) Für $c \in H_1 \setminus \{0\}$ seien p, q die Fußpunkte der von c aus gefällten Lote auf die Geraden G_1, G_2. Zeigen Sie: $|p - c| = |q - c|$.

(6) (2P) Bestimme eine Normalenform von

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

(7) (2P) Seien $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : (\!(x\,, c)\!) = 6\}$. Stellen Sie Γ dar als affinen Unterraum, d.h. in der Form $a + U$.

(8) (2P)

(a) Berechnen Sie den Abstand der beiden Graden $\Gamma_1 = e^{(1)} + \mathbb{R}(e^{(1)} + e^{(2)})$ und $\Gamma_2 = (e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}) + \mathbb{R}(e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + e^{(4)})$

(b) Konstruieren Sie sich ein Beispiel zweier nicht paralleler Ebenen Γ_1, Γ_2 mit der Eigenschaft $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ und berechnen Sie ihren Abstand.

(9) (3P) Seien $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, P_W die orthogonale Projektion auf W und $a' = P_W(a)$, $b' = P_W(b)$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}^3$ derart, dass a, b linear unabhängig sind, $(\!(a'\,, b')\!) \neq 0$ und doppelt so groß ist wie $(\!(a\,, b)\!)$.

(10) (4P)

(a) Sei K ein Körper und seien $n \geq 2$, $a, b, c, d \in K^n$ derart, dass keine drei auf einer Grade zu liegen kommen. Seien weiter p, q, r, s die Mittelpunkte der Strecken $[a, b], [b, c], [c, d], [d, a]$. Zeigen Sie: Die Geraden durch p, q und r, s und diejenigen durch q, r und s, p sind parallel, kurz: durch die Punkte p, q, r, s ist ein Parallelogramm gegeben.

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie bei vorgegebenen a, b, c in (a) den Punkt d so, dass durch p, q, r, s ein Quadrat gegeben ist oder ggf. ein Punkt.

(11) (3P) Suchen Sie nach dem „Satz von Grashof " für Gelenkvierecke und nach einem Beweis und transferieren Sie ihn in unseren Bezeichnungs- und Inhaltskontext in §1

(12) (2P) Ein schiefer Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ sei z.B. durch u.U. schiefes Abschneiden einer Ecke eines Würfels entstanden. Wählen Sie ein geeignetes rechtwinkliges Koordinatensystem und weisen Sie dann nach, dass die drei Summen der Längenquadrate gegenüberliegender Seitenpaare gleich sind.

(13) (B5P)[1] Aufgabe 248.3 aus der Sammlung von Aufgaben aus vietnamesischen Problem-solving-Zeitschriften auf der Internetseite `www.Math4U.de`

(14) (3P) Gegeben seien zwei Ebenen E, F im $\mathbb{R}^3$, die sich in einer Graden schneiden und ein Punkt z außerhalb $E \cup F$. Wir betrachten die folgende Abbildungsvorschrift (Zentralprojektion):

$$\pi(a) = \big(z + \mathbb{R}(a - z)\big) \cap F \quad \text{für} \quad a \in E.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Punkte auf E, wo $\pi(a) = \varnothing$, ist eine Gerade G.

(b) $H = F \setminus \pi(E \setminus G)$ ist eine Gerade.

(c) Wozu $\mathbb{R}$? Wäre etwa auch $\mathbb{Z}_2$ als zugrunde liegender Körper möglich?

---

[1] B-Punkte sind Bonuspunkte.

Modul Geometrie 12. und 19. November 2007

Wintersemester 2007-2008

Schmale

Aufgaben zu §2, §3 und §4 in Kapitel I

(15) (3P) Weitere Wiederholung zur Linearen Algebra: Beweisen Sie den Hilfssatz im Beweis von Satz 11 in §2 für $n = 3$.

(16) [(2)] (B4P) Zeigen Sie :

(a) Die Eulergrade ist genau dann orthogonal zu einer Seitenrichtung, wenn das zu Grunde liegende Dreieck zwei gleich lange Seiten hat.[(3)]

oder:

(b) Die Eulergrade geht genau dann durch einen Eckpunkt, wenn das Dreieck rechtwinklig ist oder zwei gleich lange Seiten hat.

(17) (3P) Zwei Tripel (Dreiecke) $D = \{a, b, c\}, D' = \{a', b', c'\}$ im $\mathbb{R}^3$ heißen *ähnlich*, wenn für ein $r \in \mathbb{R}_+$ die Dreiecke rD, D' kongruent sind. Zeigen Sie:
D und $D' = \{(a + b)/2, (b + c)/2, (c + a)/2\}$ sind ähnlich. U.A. sind auch die dafür notwendige Eckenbijektion und Bewegung anzugeben.

(18) (3P) Zeigen Sie: Zwei parallele (Definition aus der Vorlesung!) affine Unterräume in $\mathbb{R}^n$ bleiben nach einer gemeinsamen Bewegung parallel.

(19) (3P) Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sind zwei Strecken (nach Definition in §2) genau dann gleich lang, wenn sie kongruent sind (nach Definition in §3).

(20) (3P) Gegeben seien der Kegel $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_{e^{(3)},\frac{4}{5}}$ im R^3 und $\Gamma = n + U$ mit $n = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $U = n^{\perp}$.

(a) Wie würden Sie in der $(e^{(2)}, e^{(3)})$-Ebene die Mittelpunkte der Kugeln konstruieren, die den oberen Kegelteil innen kreisförmig berühren und zusätzlich Γ berühren.

(b) Bestimmen Sie die beiden Kugeln in der Form geometrischer Orte.

....

[(2)] Nach Max Köcher und Aloys Krieg, Ebene Geometrie, Springer 2007, Seite 163

[(3)] Anleitung: überlegen Sie zuerst sorgfältig, dass die Aussage invariant ist unter Bewegungen und nehmen Sie dann o.E. an, dass etwa $c = 0$ und dann $z = (a + b)/3$ ist. $\Leftarrow$: Wenn dann b und a gleich lang sind, dann gilt für $x \in M_{0a} \cap M_{0b} = \{x\}$ $x \perp b - a$. Erzeugt er die Eulergrade? $\Rightarrow$: $(x - m) \perp (b - a)$ für jeden Punkt der Eulergraden, Vergleich mit M_{ab}. Was ist mit $z - (a + b)/2$?.

Modul Geometrie 28. November 2007

Wintersemester 2007-2008

Schmale

(21) [4] (3P) Seien $r \in \mathbb{R}_+$ und $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; d(x, \mathbb{R}e^{(3)}) = r\}$. Sei weiter Γ eine Ebene, deren Richtung $e^{(3)}$ nicht enthält.

Zeigen Sie, ähnlich wie es in der Vorlesung im Falle eines Kegels mit Hilfe der Dandelin'schen Kugeln durchgeführt wurde, dass $\Gamma \cap Z$ eine Ellipse ist.

(22) (3P) Seien K ein Körper, $\mathsf{char}(K) \neq 2$ und $a, b, c \in K^n$, $n \geq 1$, drei "Punkte". Zu einer Teilmenge M von K^n sei

$$M_1 := M^{\vee} := \bigcup_{p,q \in M, p \neq q} p \vee q \quad \text{und} \quad M_2 := {M_1}^{\vee} \,.$$

Zeigen Sie für $M = \{a, b, c\}$:

M_2 ist ein affiner Unterraum.

(23) (2P) Seien V ein Vektorraum über dem Körper K, $V \neq \{0\}$ und M eine nicht-leere Teilmenge von V. Wie viele Elemente muss M mindestens enthalten, damit $\{u \in V : T_u(M) \subseteq M\}$ ein von $\{0\}$ verschiedener Untervektorraum von V wird ?

◇

(14 neu) (3P) Seien K ein Körper , E, F zwei Ebenen in K^3, die sich in einer Graden schneiden und z ein Punkt außerhalb $E \cup F$. Wir betrachten die folgende Abbildungsvorschrift (Zentralprojektion):

$$\pi(a) = \big(z + \mathbb{R}(a - z)\big) \cap F \quad \text{für} \quad a \in E.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Punkte auf E, wo $\pi(a) = \varnothing$, ist eine Gerade G.

(b) $H = F \setminus \pi(E \backslash G)$ ist eine Gerade.

---

[4] nach [KK] Seite 225.

(24) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in K^n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Dabei sei

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big) \neq 0 \ .$$

(a) (1P) Zeigen Sie:

Es gibt genau ein $g \in K^n$ derart, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(g - a^{(k)}) = 0$.

$g = g\big((a^{(1)} \ ; \ \alpha_1), \ldots, (a^{(n)} \ ; \ \alpha_n)\big)$ heißt *Baryzentrum* oder Massenzentrum der so genannten *Punktmassen* $(a^{(k)} \ ; \ \alpha_k)$.

(b) (2P) Sei $I_1, \ldots, I_r$ eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ mit nicht-leeren Teilmengen I_j und derart, dass $\displaystyle\sum_{k \in I_j} \alpha_k \neq 0$ für $1 \leq j \leq r$. Für $j = 1, \ldots, r$ sei schließlich g_j das Baryzentrum der Punktmassen $(a^{k)} \ ; \ \alpha_k)$ mit $k \in I_j$.

Zeigen Sie:

$$g\big((a^{(1)} \ ; \ \alpha_1), \ldots, (a^{(n)} \ ; \ \alpha_n)\big) = g\Big((g_1 \ ; \ \sum_{k \in I_1} \alpha_k), \ldots, (g_r \ ; \ \sum_{k \in I_r} \alpha_k)\Big) \ .$$

(25) [5] (3P) Sind die folgenden Abbildungen affin ?

(a) Seien $r \geq 1$, $n \geq 1$, $a_1, ..., a_r \in \mathbb{Q}^n$ gegeben und dann

$$f : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n,\ f(x) = \text{ Schwerpunkt von } a_1, ..., a_r, x.$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2, a \neq b$ und dann

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \text{ Höhenschnittpunkt des durch } \ a, b, x \text{ gegebenen Dreiecks.}$$

◇

(15 neu) (4P) Beweisen Sie den Hilfssatz im Beweis von Satz 11 in §2.

Anleitung:
Die Aussage ist invariant unter Bewegungen (Nachweis), daher o.E. $a^{(0)} = 0$.
Verifizieren Sie dann: $0, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ liegen genau dann nicht in einer Hyperebene, wenn $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ linear unabhängig sind.
Beschreiben Sie die Mittelsenkrechten (Hyperebenen) in Normalenform mit Hilfe von $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$.
Betrachten Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems, das den gemeinsamen Durchschnitt beschreibt.

....

[5] nach [A] Seite 36 Exercise I.31. Dort finden Sie auf Seite 302 eine Anleitung insbesondere zu (b). Ihnen eventuell unbekannte englische Namen können Sie über den Index des Buches an Hand der Definitionen erschließen oder bei mir erfragen.

Modul Geometrie 10. Dezember 2007
Wintersemester 2007-2008
Schmale

(26) (3P) In dieser Aufgabe wird die Darstellung $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ „=“ $\mathbb{R}^2$ zu Grunde gelegt. Bestimmen Sie eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die als Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als Körper aufgefasst sei, nicht affin ist.

(27) (4P) Seien Y, Y' nicht-leere affine Unterräume von K^n, K ein Körper und $f : Y \to Y'$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

f ist genau dann affin, wenn f Baryzentren von Punkten in Y in die entsprechenden Baryzentren der Bildpunkte in Y' abbildet. [6]

(28) (2P) Fortsetzung von Aufgabe (14 neu). Zeigen Sie:

Geraden in E, die nicht parallel zu F sind, werden - ggf. mit Ausnahme eines einzelnen Punktes - durch π in Graden von F abgebildet.

[6] Eine Anleitung finden Sie bei Bedarf z.B. in [A], Seite 17.

Modul Geometrie 17. Dezember 2007
Wintersemester 2007-2008
Schmale

(29) (3P) Beweisen Sie den Satz des Thales (Satz 1 in § 9 der Vorlesung) für den Fall, wo Λ und Λ' parallel sind. Auch hier lässt sich die Affinität einer geeigneten Abbildung für einen kurzen Beweis ausnutzen.

(30) **(a)** (2P) Seien H_1 und H_2 verschiedene Hyperebenen und C eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$C \subseteq H_1 \cup H_2 \Rightarrow C \subseteq H_1 \text{ oder } C \subseteq H_2.$$

(b) (2P) Jede Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n : \quad \| \, x \, \| < 1 \,\} \quad \subseteq \quad M \quad \subseteq \quad \{\, x \in \mathbb{R}^n : \quad \| \, x \, \| \leq 1 \,\}$$

ist konvex. Dabei ist mit $\| \quad \|$ die euklidische Länge bezeichnet.

(31) Gesucht ist eine bezüglich „$\subseteq$“maximale konvexe Teilmenge in $\mathbb{R}^2$, die den Nullpunkt als einzigen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthält.

(a) (2P) Geben Sie dazu eine Menge an, die Ihrer Meinung nach die Anforderung erfüllt und rechtfertigen Sie Ihre Vermutung.

(b) (2P) Weisen Sie die Konvexität Ihrer Menge nach versuchen Sie auch die Maximalität zu beweisen zumindest indem Sie konkrete zielführende Schritte vorgeben.

(c) (1P) Ist die von Ihnen angegebene Menge die einzige Lösung ? (Begründung oder weiteres Beispiel)

◇

(32) (B5P) Auf der Internetseite `http://www.artofproblemsolving.com/` über den Pfad

Community ≫ Forum ≫ Search

und dann mit dem Seitentitel

„Nice relation with equilateral triangle and its incircle “

finden Sie drei Lösungsvorschläge zu Aufgabe (13). Alle drei sind aber recht knapp beschrieben. Stellen Sie eine der Lösungen ganz ausführlich dar. Für den Fall dass der Link abstirbt ist das Material auch über die Vorlesungsseite zugänglich.

(33) [(7)]Ein Punkt c einer konvexen Menge C in $\mathbb{R}^n$ heißt *Extremalpunkt von* C oder *Ecke von* C, wenn für alle $a, b \in C, a \neq b$ gilt:

$$c \in [a, b] \;\Rightarrow\; \big[\, c = a \text{ oder } c = b \,\big]\,.$$

Zeigen Sie:

(a) (B3P) c ist Ecke von C genau dann, wenn $C \setminus \{c\}$ konvex ist.

(b) (B3P) Sind $c^{(0)}, \ldots, c^{(r)}$ in $\mathbb{R}^n$ affin unabhängig, dann sind sie Ecken ihrer Konvexen Hülle.

(34) [(8)] (B4P) Sei $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$ eine Menge von mindestens drei Punkten in $\mathbb{R}^2$, und sei q ein Punkt aus $\mathscr{C}(P)$. Zeigen Sie:
Es gibt drei Punkte $p_i, p_j, p_k \in P$ derart dass $q \in \mathscr{C}(p_i, p_j, p_k)$.

....

[(7)]Nach [FG], Kapitel 2.1.
[(8)]Eine Aufgabe vom laufenden Semester in Zürich, siehe `http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/CG07/`

Modul Geometrie 7. Januar 2008

Wintersemester 2007-2008

Schmale

(35) (4P) Bestimmen Sie Halbräume in der Form $H_{w,\varrho}$ derart, dass ihr Durchschnitt genau die Menge

$$\mathscr{C}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right)$$

ergibt.

(36) (5P) **Eine besondere Einbettung von $\boldsymbol{K^n}$ in $\boldsymbol{K^{n+1}}$.** Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\alpha : K^n \longrightarrow K^{n+1}$, $\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{bmatrix}$ ist eine injektive affine Abbildung.

(b) Sei $H := \alpha(K^n)$. Zeigen Sie: Die affinen Abbildungen von H nach H sind genau die Einschränkungen derjenigen linearen Abbildungen von K^{n+1} auf H, die H in H abbilden.

(c) Welche Gestalt hat die Matrix einer linearen Abbildung von K^{n+1}, die H in H abbildet, bezüglich der kanonischen Basis.

(d) Zeigen Sie: $\mathscr{A}(n)$ ist isomorph zur Untergruppe

$$\left\{ M \in \mathscr{G}(n+1) : \; M = \begin{bmatrix}M' & v\\ 0 & 1\end{bmatrix}, M' \in \mathscr{G}(n), v \in K^n \right\}$$

von $\mathscr{G}(n+1)$.

Modul Geometrie 14. Januar 2008
Wintersemester 2007-2008
Schmale

(37) (3P) Entscheiden Sie, ob der Punkt $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ im Newtonpolytop des folgenden Polynoms f liegt:

$$f = 1 + x_1x_2^2x_3^4 + x_1x_2^4x_3^2 + x_1x_2^3x_3^4 + x_1x_2 + x_1^2x_3 \ .$$

(38) (3P) Zu einer Teilmenge M in $\mathbb{R}^n$ sei

$$\mathsf{keg}(M) = \Big\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)} : \ r \in \mathbb{N}, \ x^{(1)}, \ldots, x^{(r)} \in M, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \lambda_i \geq 0 \Big\} \ .$$

Zeigen Sie: $\mathsf{keg}(M)$ ist konvex und keg ist ein Hüllenoperator (§10, Eigenschaft (i)-(iii)).

(39) (3P) Bestimmen Sie (bezüglich des Standardskalarproduktes)

(a) die Schnittpunkte der Polaren der komplexen Zahlen $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$ aufgefasst als Punkte in $\mathbb{R}^2$,

(b) und die Polaren der Schnittpunkte.

(40) [(9)] (B4P) Bestimmen Sie die polaren Mengen zu den konvexen Hüllen der Punkte

(a) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$.

....

(9) Aus einer Vorlesung zur diskreten Geometrie, Eva Maria Feichtner, 2006, Zürich.

(41) [10] (3P) Ein Würfel im $\mathbb{R}^3$ erscheine für einen Betrachter im Punkt z bei zentraler Projektion mit Zentrum z auf der Ebene $\langle e^{(1)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$ als Abbild mit drei Fluchtpunkten

$$F1 = (-22, 0, 11), F2 = (11, 0, 22), F3 := (0, 0, -22) \ .$$

Bestimmen Sie die möglichen Betrachtungspunkte z.

(42) (3P) Sei V ein vierdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $\mathbb{P}(V)$ der zugehörige projektive Raum. Zeigen Sie ausführlich auf Grund der Definitionen 1 und 2 in §12:

Der Verbindungsraum dreier Punkte aus $\mathbb{P}(V)$, die nicht auf einer Graden liegen, ist eine Ebene.

(43) (3P) Sei $C = \{ \, x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 x_2 = x_3^2 \, \}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine Teilmenge $\mathcal{P}_C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ derart, dass

$$\bigcup_{p \, \in \, \mathcal{P}_C} p \ = \ C$$

(b) Bestimmen Sie eine Hyperebene H in $\mathbb{R}^3$ derart, dass $H \cap C$ einen Kreis oder eine Ellipse ergibt.

---

[10] Nach Exercise 4.4.1 p. 119 in [J].

Modul Geometrie 28. Januar 2008

Wintersemester 2007-2008

Schmale

(44) (3P)

(a) Gibt es eine Projektivität von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2}$ ohne Fixpunkte ?

(b) Gibt es eine Projektivität von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ mit genau zwei Fixpunkten ?

(45) [11] Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zwei Geraden $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ in $\mathbb{P}(V)$ heißen *windschief*, wenn $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \varnothing$.

(a) (2P) Seien $\mathsf{dim}_K V = 4$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ windschiefe Geraden in $\mathbb{P}(V)$ und p ein Punkt in $\mathbb{P}(V)$, der weder in $\mathcal{G}_1$ noch in $\mathcal{G}_2$ liegt. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Gerade $\mathcal{G}$, die p enthält und sowohl $\mathcal{G}_1$ als auch $\mathcal{G}_2$ schneidet.

(b) (B3P) Seien $\mathsf{dim}_K V = 5$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ paarweise windschiefe Geraden in $\mathbb{P}(V)$, die nicht alle in einer Hyperebene liegen. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{G}_1$ schneidet $\mathcal{G}_2 \vee \mathcal{G}_3$ in einem Punkt.

(ii) Es gibt genau eine Grade $\mathcal{G}$ in $\mathbb{P}(V)$, die $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$ schneidet.

(46) (3P) Seien $w^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, w^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

Die Punkte $p_i = \mathbb{R}w^{(i)}, 0 \le i \le 3$ seien die Bildpunkte der projektiven Standardbasis von $\mathbb{P}^2$ unter einer Projektivität f von $\mathbb{P}^2$. Bestimmen Sie das Bild des Punktes $p = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ unter f.

[11] Nach einer Aufgabe in dem Buch *Lineare Algebra und Geometrie* von Heiner Zieschang, Teubner, 1997, S. 466.

(47) (B3P) Begründen Sie ausführlich mit Hilfe des projektiven Satzes von Desargues, dass die beiden Konstruktionen im Beispiel 7 in §12 zum Ziel führen. Mit Cinderella dynamisierte Zeichnungen zu den beiden Konstruktionen finden Sie auf der Internetseite zur Vorlesung.

(48) Lesen Sie spätestens jetzt den als Weihnachtslektüre angegebenen Text von Johann Linhart zur Geometrie(12), Seiten 1-21. Bei einer der Klausuraufgaben wird das zumindest hilfreich, wenn auch nicht vorausgesetzt, sein.

⋄

Die folgenden **Aufgaben** sind **zur Vorbereitung auf die Klausur** besonders geeignet. Einige Musterlösungen werden ab 11. Februar nach und nach auf der Internetseite zur Vorlesung erscheinen.

(3), (5) bis (10), (12), (14), (14neu), (15), (15 neu), (17), (18), (19), (22) bis (27), (29), (30), (31), (33), (36), (37), (38), (41) bis (46), (48).

⋄

Die vereinbarten zusätzlichen Übungstermine sind:

26. Februar und 4. März jeweils um 18.15 im Raum W1-1-117.

Die Klausur findet statt am

15. März von 9 bis 11 Uhr im Raum W1-0-015.

Der Termin für eine eventuelle Wiederholungsklausur wird rechtzeitig auf der Internetseite der Vorlesung angegeben.

---

(12) `http://www.sbg.ac.at/mat/staff/linhart.htm`