Ausblick zur weiteren Theorie ebener affiner Inzidenzgeometrien

Sei (P,G,I) eine ebene affine Inzidenzgeometrie.

Es gelten somit die folgenden drei Axiome:

$\boldsymbol{A_1}$ Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

$\boldsymbol{A_2}$ Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

$\boldsymbol{A_3}$ Zu einer Geraden g und einem Punkt a, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h durch a ohne gemeinsamen Punkt mit g.

Einer der Höhepunkte der Theorie ebener affiner Inzidenzgeometrien wird erreicht durch Hinzunahme des folgenden weiteren geometrisch einleuchtenden Axioms

$\boldsymbol{A_4}$ Seien die Punkte z, a, a' verschieden und kollinear, ebenso z, b, b' und z, c, c'. Außerdem seien die drei dadurch gegebenen Geraden $z \vee a, z \vee b, z \vee c$ verschieden. Wenn dann $a \vee b \,||\, a' \vee b'$ und $b \vee c \,||\, b' \vee c'$, dann ist auch $c \vee a \,||\, c' \vee a'$.
(affiner Satz von Desargues (Gérard, 1593-1662))

Eine dynamische Zeichnung zu diesem Axiom ist über die Vorlesungsseite im Internet zugänglich.

Nach einiger Anstrengung kann folgendes Resultat erreicht werden

Satz 4: Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G, I). Gilt zusätzlich $\boldsymbol{A_4}$, dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2$, $G =$ Menge der eindimensionalen affinen Unterräume in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Graden in K^2 mit einem Körper K, der **allerdings** nicht notwendigerweise kommutativ(1) ist.

Mindestens genauso erstaunlich ist das folgende Resultat

Satz 5: Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G, I). Gilt zusätzlich $\boldsymbol{A_5}$, dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2$, $G =$ Menge der eindimensionalen affinen Unterräume in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Graden in K^2 mit einem **kommutativen** Körper K. Dabei ist $\boldsymbol{A_5}$ das folgende ebenfalls geometrisch einleuchtende Axiom:

$\boldsymbol{A_5}$ Seien die Punkte a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 jeweils verschieden und kollinear auf verschiedenen Geraden.
Wenn dann $a_1 \vee b_2 \,||\, a_2 \vee b_3$ und $a_2 \vee b_1 \,||\, a_3 \vee b_2$, dann ist auch $a_1 \vee b_1 \,||\, a_3 \vee b_3$.
(affiner Satz von Pappos (von Alexandria, ca 300 n. Chr.))

Eine dynamische Zeichnung auch zu diesem Axiom ist über die Vorlesungsseite im Internet zugänglich.

Literaturangaben: Günter Pickert: Ebene Inzidenzgeometrie, 3. Auflage, Diesterweg, 1971; Max Köcher und Aloys Krieg: Ebene Geometrie, 3. Auflage, Springer, 2007.

....

(1) Im nicht-kommutativen Fall spricht man von einem Schiefkörper. Wichtige Teile der linearen Algebra können unbeschadet auch über nicht-kommutativen Körpern entwickelt werden. Dazu gehören lineare Gleichungen und deren Lösungsräume bzw. affine Unterräume. Statt von Vektorräumen wird dann meist von Modulen über einem Schiefkörper gesprochen. Ein Modul über einem nicht unbedingt kommutativen Körper K wird K-Vektorraum genannt. Die Theorie dazu findet man in den etwas umfangreicheren Algebralehrbüchern, wie z.B. dem von Günter Scheja und Uwe Storch im Teil I.