Definition 6. affine Erzeugung, affine Unabhängigkeit, affine Basis.

(a) Seien Y ein affiner Unterraum von X und M eine Teilmenge von X.

$$M \underline{\text{ erzeugt } Y \text{ affin}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \overline{M}^{\mathsf{aff}} = Y \quad \Longleftrightarrow: \quad M \underline{\text{ affines Erzeugendensystem}} \text{ von } Y$$

(b) Ein affines Erzeugendensystem M des affinen Unterraumes V von X heißt unverkürzbar oder affine Basis von $\boldsymbol{Y}$, oder affines Bezugssystem von $\boldsymbol{Y}$, wenn gilt:

$$\forall p \in M : \quad \overline{M \setminus \{p\}}^{\mathsf{aff}} \neq Y \ .$$

(c) Eine Teilmenge M von X heißt affin unabhängig oder in allgemeiner Lage, wenn M eine affine Basis von $\overline{M}^{\mathsf{aff}}$ ist.

Beispiele. $\rightarrow$ Vorlesung

Satz 7. Charakterisierung affiner Basen. Äquivalent sind:

(a) M affine Basis von Y

(b) Für **alle** $p \in M$ ist $\varphi(p, \bullet)\big(M \setminus \{p\}\big)$ eine Basis von $\overrightarrow{Y}$.

(c) Für **ein** $p \in M$ ist $\varphi(p, \bullet)\big(M \setminus \{p\}\big)$ Basis von $\overrightarrow{Y}$.

Beispiel 8. klassischer Fall: $Y \subseteq K^n \rightarrow$ Vorlesung

Satz 9. Seien Y ein affiner Unterraum von X und $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ aus Y. Dann sind äquivalent:

(a) $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ affine Basis von Y

(b) $\overrightarrow{a^{(0)}a^{(1)}}, \ldots, \overrightarrow{a^{(0)}a^{(r)}}$ Basis von $\overrightarrow{Y}$

Definition 10. Der affine Unterraum Y von X heiße Hyperebene, wenn $\mathsf{dim}_K(Y) := \mathsf{dim}_K X - 1$, bzw., wenn $\mathsf{dim}_K \overrightarrow{Y} = \mathsf{dim}_K \overrightarrow{X} - 1$.

Satz 11. Paralleleneigenschaft in affinen Räumen. Seien Y eine Hyperebene von X und $x \in X \backslash Y$. Dann gibt es genau eine Hyperebene Y' von X derart, dass $x \in Y'$ und $Y \cap Y' = \varnothing$.

affine Koordinaten, Affinkombinationen

Satz 12. Grundlage für baryzentrische Koordinaten. Seien (X, V, φ) ein affiner Raum über K (d.h. V ist ein K-Vektorraum), Y ein affiner Unterraum von X und $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ eine affine Basis von Y.

(a) Sei $p \in Y$. Es gibt genau einen Vektor von Skalaren $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \in K^{r+1}$ derart, dass

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{p\, a^{(i)}} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \ .$$

$(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ mit $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$ heißt baryzentrischer Koordinatenvektor von p bezüglich $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$.

(b) Wenn $p \in X$, $\sum_{i=}^{r} \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{p\, a^{(i)}} = 0$, dann ist $p \in Y$.

Satz 13. affine Unterräume eines K-Vektorraums als Menge spezieller Linearkombinationen. Seien Y ein affiner Unterraum eines K-Vektorraums und $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)}$ eine affine Basis von Y. Dann ist

$$Y = \Big\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^{(i)} : \ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i \in K \Big\}$$

Definition 14. Affinkombinationen

Satz 15. Weitere Charakterisierung affiner Unterräume von Vektorräumen.

Sei M Teilmenge eines K-Vektorraums V.

(a) M ist ein affiner Unterraum $\Leftrightarrow$ M enthält mit je endlich vielen Punkten auch alle deren Affinkombinationen.

(b) $\overline{M}^{\mathsf{aff}} = \{$ Affinkombinationen von Punkten aus $M\}$.