

§ 2 Affine Abbildungen und ihre Invarianten.

Um die Bezeichnungen und Schreibweisen zu vereinfachen ziehen wir uns jetzt zurück auf affine Unterräume von K^n , K ein Körper. Dabei sei stets $\overrightarrow{pq} = q - p$ für $p, q \in K^n$.

Für eine allgemeinere, aber bis auf Isomorphie doch gleiche, Situation kann z.B. auf die Bücher „Analytische Geometrie“ von Gerd Fischer, „Geometry“ von Michèle Audin oder auf das Standardwerk von Marcel Berger verwiesen werden.⁽¹⁾

Definition 1. Affine Abbildung. Seien Y, Y' affine Unterräume von K^n . Eine Abbildung $f : Y \rightarrow Y'$ heißt affin, wenn gilt:

$$\exists \underset{\text{linear}}{\ell : \overrightarrow{Y} \rightarrow \overrightarrow{Y'}} \quad \forall_{p, q \in Y} : \overrightarrow{f(p)f(q)} = \ell(\overrightarrow{pq}) \quad (= f(q) - f(p) \stackrel{(2)}{=} \ell(q) - \ell(p)) .$$

Satz 2. Erste Eigenschaften. Seien Y, Y' affine Unterräume von K^n und $f : Y \rightarrow Y'$ eine Abbildung.

- (a) $f : Y \rightarrow Y'$ affin $\iff \exists \underset{\text{linear}}{\ell : \overrightarrow{Y} \rightarrow \overrightarrow{Y'}} \quad \exists_{p^* \in Y} p^* \quad \forall_{q \in Y} \quad f(q) = f(p^*) + \ell(q - p^*)$
- (b) ℓ ist durch die affine Abbildung eindeutig bestimmt und heißt **zu f gehörige lineare Abbildung**.
- (c) Zu jeder linearen Abbildung $\ell : \overrightarrow{Y} \rightarrow \overrightarrow{Y'}$ und jedem $p^* \in Y$ und $p^{*'} \in Y'$ ist durch

$$f(q) := p^{*'} + \ell(q - p^*) \text{ für } q \in Y$$

eine affine Abbildung gegeben.

- (d) Die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen ist affin.
- (e) $Y = a + U$, $f : Y \rightarrow Y'$ affin mit ℓ als zugehöriger linearer Abbildung.
Dann ist $f(Y) = f(a) + \ell(U) (\subseteq Y')$.

Beispiel 3.

- (a) **Lineare Abbildungen**
- (b) **Einschränkung affiner Abbildungen** auf affine Unterräume.
- (c) **Translationen.** Die zugehörige lineare Abbildung ist die Identität.
- (d) **Dilatationen:** $\alpha \in K, p, p' \in Y, f : Y \rightarrow Y$ mit $f(q) = p' + \alpha(q - p)$. Insbesondere ist dabei $f(p) = p'$. Wenn $p' = p$, heißt f dabei (**reine**) **Streckung mit Zentrum p** . Wenn $\alpha \neq 0$, heißt f **echte Dilatation** oder ggf. Streckung.
- (e) **(Parallel)-Projektion** eines affinen Unterraumes Y entlang oder parallel zu einer Richtung W (Untervektorraum von K^n) in einen affinen Unterraum $Y' = a + U$. Voraussetzung dabei ist: $U \oplus W = K^n$. Sei $\ell : K^n \rightarrow K^n$ die Projektion entlang W auf U (also $\ell(u + w) = u, u \in U, w \in W$). Dann wird für $q \in Y$ festgelegt: $f(q) := a + \ell(q)$.
- (f) **Spiegelung** an einem UVR. Spezialfall von (a). Verallgemeinerung für affine Unterräume als Übung.

Es folgen weitere grundlegende Eigenschaften affiner Abbildungen.

Satz 4. Sei $f : Y \rightarrow Y'$ eine affine Abbildung und ℓ die dazu gehörende lineare Abbildung.

- (a) f injektiv $\iff \ell$ injektiv
- (b) f surjektiv $\iff \ell$ surjektiv
- (c) f bijektiv $\implies f^{-1}$ affin
- (d) $[y \in Y, y' \in Y' \text{ und } f(y) = y'] \implies f^{-1}(y') = y + \text{Kern } \ell$
- (e) Ist Z ein affiner Unterraum von Y und Z' ein affiner Unterraum von Y' , dann ist $f(Z)$ ein affiner Unterraum von Y' und $f^{-1}(Z')$ ein affiner Unterraum von Y . Insbesondere gilt für alle $p, q \in Y$:
 $f(p \vee q) = f(p) \vee f(q)$ (vgl. unten Def. 5). Außerdem ist $\dim f(Z) \leq \dim Z$.

Die Beweise sind kleine ergänzende Übungen zu den Anfängen der linearen Algebra.

⁽¹⁾genauere Angaben auf der Vorlesungsseite im Internet.

⁽²⁾falls ℓ auf ganz K^n erklärt ist