Aufgabe 15

Aufgabenstellung:
Zeigen Sie durch Angabe geeigneter Halbräume, die $\mathcal{S}$ enthalten, dass das Standardsimplex $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ entsprechend der Definition in der Vorlesung polyedrisch ist.

Vorüberlegungen:
Aus der Vorlesung ist bekannt:

Definition 15
Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge. $\mathcal{M}$ ist polyedrisch, wenn $\mathcal{M}$ Durchschnitt endlich vieler Halbräume ist.

Zu zeigen:

$$\mathcal{S} := C\,(0, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}) = \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{H}_i$$

Beweis:
Wähle nun geeignete Halbräume $\mathcal{H}_i$, die $\mathcal{S}$ enthalten:

Mit $\Gamma_1 := < e^{(1)}, e^{(3)} >_{\mathbb{R}}$ definieren wir:

$$\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_{\Gamma_1, e^{(2)}} = \{0 + \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(3)} + \beta_3 e^{(2)} : \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}, \beta_3 \geq 0\}$$

Mit $\Gamma_2 := < e^{(2)}, e^{(3)} >_{\mathbb{R}}$ definieren wir:

$$\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_{\Gamma_2, e^{(1)}} = \{0 + \gamma_1 e^{(2)} + \gamma_3 e^{(3)} + \gamma_3 e^{(1)} : \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}, \gamma_3 \geq 0\}$$

Mit $\Gamma_3 := < e^{(1)}, e^{(2)} >_{\mathbb{R}}$ definieren wir:

$$\mathcal{H}_3 := \mathcal{H}_{\Gamma_3, e^{(3)}} = \{0 + \lambda_1 e^{(1)} + \lambda_2 e^{(2)} + \lambda_3 e^{(3)} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_3 \geq 0\}$$

Mit $\Gamma_4 := < e^{(2)} - e^{(1)}, e^{(3)} - e^{(1)} >_{\mathbb{R}} + e^{(1)}$ definieren wir:

$$\mathcal{H}_4 := \mathcal{H}_{\Gamma_4, -e^{(1)}} = \{e^{(1)} + \mu_1(e^{(2)} - e^{(1)}) + \mu_2(e^{(3)} - e^{(1)}) + \mu_3(-e^{(1)}) : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}, \mu_3 \geq 0\}$$

Die auf der nächsten Seite aufgeführten Skizzen machen die Wahl der Γ_i und $\mathcal{H}_i$ deutlich.

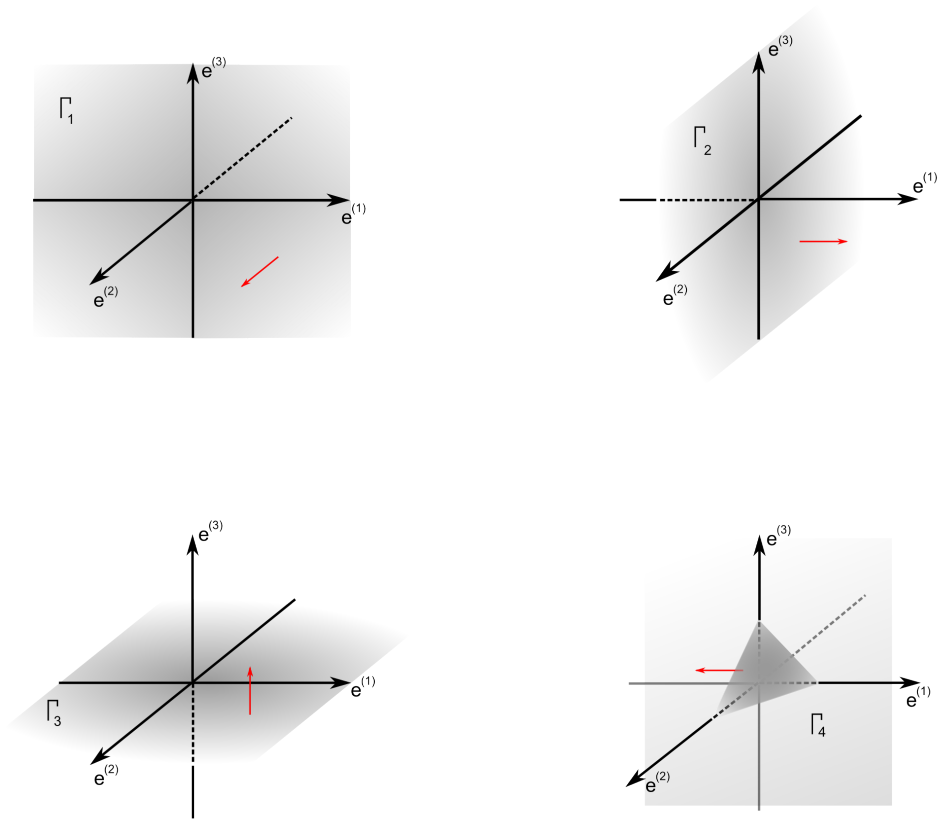


Abbildung 1: Skizzen zu den Halbräumen

Für die einzelnen Elemente $y_i \in \mathcal{H}_i$ $(1 \le i \le 4)$ gilt:

$$\begin{aligned}
y_1 \in \mathcal{H}_1 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(3)} + \beta_3 e^{(2)} \\
y_2 \in \mathcal{H}_2 \quad &\Rightarrow \quad y_2 = \gamma_1 e^{(2)} + \gamma_2 e^{(3)} + \gamma_3 e^{(1)} \\
y_3 \in \mathcal{H}_3 \quad &\Rightarrow \quad y_3 = \lambda_1 e^{(1)} + \lambda_2 e^{(2)} + \lambda_3 e^{(3)} \\
y_4 \in \mathcal{H}_4 \quad &\Rightarrow \quad y_4 = e^{(1)} + \mu_1 (e^{(2)} - e^{(1)}) + \mu_2 (e^{(3)} - e^{(1)}) + \mu_3 (-e^{(1)}) \\
&\qquad\quad = (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)\, e^{(1)} + \mu_1 e^{(2)} + \mu_2 e^{(3)}
\end{aligned}$$

Nun zeige erst:

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{H}_i$$

Dazu wird geprüft, ob jeder Punkt $x \in \mathcal{S}$ wie y_1, y_2, y_3, y_4 dargestellt werden kann. Dabei hat x

die folgende Darstellung:

$$x = \alpha_0 \cdot 0 + \alpha_1 \cdot e^{(1)} + \alpha_2 \cdot e^{(2)} + \alpha_3 \cdot e^{(3)}$$

Hierbei ist $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Weil $e^{(0)} := 0$, tritt α_0 nur indirekt auf. Es gilt:

$$\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1 \tag{1}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$y_1 = \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(3)} + \beta_3 e^{(2)} = \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \alpha_3 e^{(3)}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_3$ und $\beta_3 = \alpha_2$ gewählt wird. Diese Wahl ist auch zulässig, weil:

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \end{aligned}$$

Analog gilt für y_2, y_3, y_4 mit Koeffizientenvergleich:

$$y_2 = \gamma_1 e^{(2)} + \gamma_2 e^{(3)} + \gamma_3 e^{(1)} = \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \alpha_3 e^{(3)}$$

Hier wird gewählt: $\gamma_1 = \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_3$ und $\gamma_3 = \alpha_1$.

$$y_3 = \lambda_1 e^{(1)} + \lambda_2 e^{(2)} + \lambda_3 e^{(3)} = \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \alpha_3 e^{(3)}$$

Hier wird gewählt: $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$ und $\lambda_3 = \alpha_3$.

$$y_4 = (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)\, e^{(1)} + \mu_1 e^{(2)} + \mu_2 e^{(3)} = \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \alpha_3 e^{(3)}$$

Hier wird gewählt: $(1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) = \alpha_1$, $\mu_1 = \alpha_2$ und $\mu_2 = \alpha_3$. Diese Wahl der Skalare μ_i führt direkt in den Halbraum $\mathcal{H}_4$, da gilt:

$$\begin{aligned} x &= (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)\, e^{(1)} + \mu_1 e^{(2)} + \mu_2 e^{(3)} \\ &= e^{(1)} - \mu_1\, e^{(1)} - \mu_2\, e^{(1)} - \mu_3\, e^{(1)} + \mu_1 e^{(2)} + \mu_2 e^{(3)} \\ &= e^{(1)} + \mu_1\, (e^{(2)} - e^{(1)}) + \mu_2\, (e^{(3)} - e^{(1)}) + \mu_3\, (-e^{(1)}) \in \mathcal{H}_4 \end{aligned}$$

Mit geeigneter Wahl der β_i, γ_i, λ_i und μ_i mit $1 \leq i \leq 4$ lässt sich also jeder Punkt $x \in \mathcal{S}$ darstellen wie $y_1 \in \mathcal{H}_1$, $y_2 \in \mathcal{H}_2$, $y_3 \in \mathcal{H}_3$ und $y_4 \in \mathcal{H}_4$. Das bedeutet, dass jeder Punkt x in den vier Halbräumen $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ und $\mathcal{H}_4$ enthalten ist. Es gilt deshalb:

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{H}_i$$

Jetzt zeige:

$$\bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{S}$$

Sei hierfür $x \in \bigcap \mathcal{H}_i$ ($1 \leq \mathrm{i} \leq 4$). Dann gilt für x:

$$\begin{aligned} x &= \beta_1 e^{(1)} + \beta_2 e^{(3)} + \beta_3 e^{(2)} \\ &= \gamma_1 e^{(2)} + \gamma_2 e^{(3)} + \gamma_3 e^{(1)} \\ &= \lambda_1 e^{(1)} + \lambda_2 e^{(2)} + \lambda_3 e^{(3)} \\ &= (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)\, e^{(1)} + \mu_1 e^{(2)} + \mu_2 e^{(3)} \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \gamma_3 = \lambda_1 = (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) \geq 0 \\ &\beta_2 = \gamma_2 = \lambda_3 = \mu_2 \geq 0 \\ &\beta_3 = \gamma_1 = \lambda_2 = \mu_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Also sind alle Skalare vor den $e^{(i)}$ ($1 \leq \mathrm{i} \leq 4$) größer bzw. gleich Null. Es bleibt noch zu zeigen, dass gilt: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1 &= (1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) + \mu_1 + \mu_2 \\ &= 1 - \mu_3 \\ &\leq 1 \qquad \text{weil } \mu_3 \geq 0 \text{ nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

Wähle nun: $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2 = \lambda_2$ und $\alpha_3 = \lambda_3$. Damit sind dann mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1$ wegen (1) alle Voraussetzungen für einen beliebigen Punkt in $\mathcal{S}$ erfüllt. Daraus folgt:

$$\bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{S}$$

Insgesamt gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{H}_i = \mathcal{S}$$

□

Aufgabe 16 a)

Seien q, q' linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$, $c = \alpha q$, $c' = \alpha' q'$ mit $\alpha, \alpha' \in]0, 1]$.

zu zeigen:

Zu jedem $q'' \in [q, q']$ gibt es ein $\alpha'' \in]0, 1]$ derart, dass $\alpha'' q'' \in [c, c']$

Beweis:
Sei also $q'' \in [q, q']$, d. h. es existieren β, $\beta' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\beta + \beta' = 1$, sodass gilt:

$$q'' = \beta q + \beta' q'$$

Diese Gleichung kann mit α'' erweitert werden, so dass sich folgende Darstellung ergibt:

$$\alpha'' q'' = \beta \alpha'' q + \beta' \alpha'' q' \tag{2}$$

Da zu zeigen ist, dass $\alpha'' \in]0, 1]$ existiert, sodass $\alpha'' q'' \in [c, c']$ ist, muss nun ein solches α'' gewählt werden. Es bietet sich an, dass α'' mit Hilfe der vorgegebenen $\alpha, \alpha' \in]0, 1]$ und $\beta, \beta' \in [0, 1]$ zu wählen. Am einfachsten wäre nun die Darstellung $\alpha'' = \alpha \cdot \alpha'$, wobei offensichtlich $\alpha'' \in]0, 1]$ gilt. Damit wäre aber $\alpha'' q''$ keine Konvexkombination aus $[c, c']$, weil für

$$\alpha'' q'' \overset{(2)}{=} \beta \alpha' \cdot \underbrace{\alpha q}_{=c} + \beta' \alpha \cdot \underbrace{\alpha' q'}_{=c'}$$

die Summe der Skalare, also $\beta\alpha' + \beta'\alpha$, nicht immer gleich 1 ergibt. Also muss die Darstellung so um ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erweitert werden, dass $\alpha'' \in]0, 1]$ und $\alpha'' q'' \in [c, c']$ gilt. Es muss also auch gelten:

$$\alpha'' q'' = x \cdot \beta \alpha' \cdot \underbrace{\alpha q}_{=c} + x \cdot \beta' \alpha \cdot \underbrace{\alpha' q'}_{=c'} \in [c, c']$$

Dies ist erfüllt für folgendes x:

$$\begin{aligned} & x \cdot \beta \alpha' + x \cdot \beta' \alpha \overset{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot (\beta \alpha' + \beta' \alpha) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{\beta \alpha' + \beta' \alpha} \end{aligned}$$

Der Nenner $\beta \alpha' + \beta' \alpha$ ist echt größer als Null, da wegen $\beta, \beta' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\beta + \beta' = 1$ nie beide Summanden (mit $\beta = \beta' = 0$ und α, $\alpha' > 0$) Null sein können.

Wähle nun also:

$$\alpha'' = \frac{\alpha \cdot \alpha'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} \tag{3}$$

Damit gilt dann $\alpha'' \in]0,1]$, weil:

- Mit $\alpha,\ \alpha' \in]0,1]$ ist der Zähler $\alpha \cdot \alpha' > 0$. Außerdem ist auch der Nenner $\beta\alpha' + \beta'\alpha > 0$, wie bereits erläutert. Also gilt $\alpha'' > 0$.
- Zudem gilt mit $\alpha,\ \alpha' \in]0,1]$:

$$\alpha'' = \frac{\alpha \cdot \alpha'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} = \frac{\overbrace{(\beta+\beta')}^{=1}\alpha \cdot \alpha'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \alpha'\beta}^{\leq \alpha'\beta} + \overbrace{\alpha' \cdot \alpha\beta'}^{\leq \alpha\beta'}}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} \leq \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha'\beta + \alpha\beta'} = 1$$

  Also ist $\alpha'' \leq 1$.

Mit diesem α'' gilt nun auch $\alpha''q'' \in [c, c']$, weil:

$$\alpha''q'' \overset{(2)}{=} \beta\alpha''q + \beta'\alpha''q' \overset{(3)}{=} \beta\frac{\alpha \cdot \alpha'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha}q + \beta'\frac{\alpha \cdot \alpha'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha}q' = \frac{\alpha' \cdot \beta}{\beta\alpha' + \beta'\alpha}\underbrace{\alpha q}_{=c} + \frac{\alpha \cdot \beta'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha}\underbrace{\alpha' q'}_{=c'}$$

Die Skalare vor dem c und c' sind beide jeweils größer bzw. gleich Null, weil zum einen der gemeinsame Nenner $\beta\alpha' + \beta'\alpha > 0$ (wie oben bereits gezeigt) und zum anderen sowohl $\alpha'\beta > 0$, als auch $\alpha\beta' > 0$ wegen $\alpha,\ \alpha' > 0$ und $\beta,\ \beta' \geq 0$. Zudem gilt für die Summe dieser Skalare:

$$\frac{\alpha' \cdot \beta}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} + \frac{\alpha \cdot \beta'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\beta\alpha' + \beta'\alpha} = \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha'\beta + \alpha\beta'} = 1$$

Somit ist $\alpha''q''$ eine Konvexkombination aus $[c, c']$. Mit anderen Worten: $\alpha''q'' \in [c, c']$.

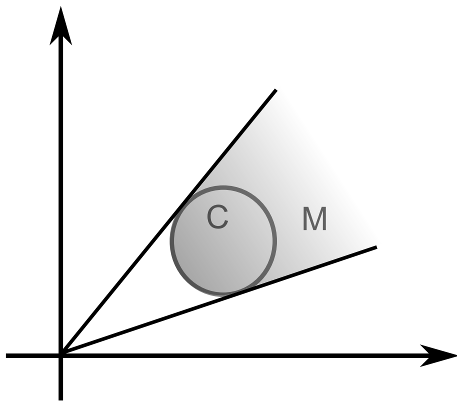
$\square$

Aufgabe 16 b)

Sei $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^2$ und 0 ein innerer Punkt von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ (d. h. $0 \notin C$). Sei außerdem:

$$\mathcal{M} := \{q \in \mathbb{R}^2 : q \neq 0,\ [0, q] \cap C \neq \emptyset\}$$

Skizze:



Vorüberlegungen:
Für alle $q \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$q \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \underbrace{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,,\ \alpha + \beta = 1}_{\text{d. h. } \alpha, \beta \in [0,1]} :\ \alpha q + \beta \cdot 0 \in C$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \alpha \in\ ]\,0, 1] :\ \alpha q \in C$$

Hierbei muss natürlich $\alpha = 0$ ausgeschlossen werden, da sonst gelten würde:

$$\alpha q = 0 \cdot q = 0 \notin C \quad \text{(nach Voraussetzung)}$$

Somit gilt:

$$\mathcal{M} = \{q \in \mathbb{R}^2\ :\ \exists\, \alpha \in\ ]\,0, 1]\ :\ \alpha q \in C\}$$

zu zeigen:

i) $\mathcal{M}$ ist konvex.
ii) $q \in \mathcal{M} \Rightarrow \lambda q \in \mathcal{M}$ für $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 1}$

Beweis:

i) Per Definition von $\mathcal{M}$ gilt:

$$\forall q,\, q' \in \mathcal{M} \;\; \exists\, \alpha,\, \alpha' \in \,]\,0,1] \;:\; \alpha q =: c \in \mathcal{C} \text{ und } \alpha' q' =: c' \in \mathcal{C}$$

Aus der Vorlesung ist außerdem bekannt:

Definition 3
Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}^n$. $\mathcal{M}$ ist konvex, wenn gilt: $\forall a, b \in \mathcal{M} : \; [a, b] \subseteq \mathcal{M}$

Zeige also: Jedes Element aus $[q, q']$ liegt in $\mathcal{M}$, d. h. $[q, q'] \subseteq \mathcal{M}$.

Beweis:
Mit Aufgabenteil 16 a) wissen wir, dass zu jedem Element $q'' \in [q, q']$ ein $\alpha'' \in \,]\,0, 1]$ derart existiert, dass gilt:

$$\alpha'' q'' \in [c, c']$$

Dabei ist $[c, c'] \subseteq \mathcal{C}$, da $\mathcal{C}$ konvex ist. Also folgt $\alpha'' q'' \in \mathcal{C}$ und dann nach Definition von $\mathcal{M}$ auch $q'' \in \mathcal{M}$. Da q'' aus $[q, q']$ beliebig gewählt wurde, gilt schließlich $[q, q'] \subseteq \mathcal{M}$.

ii) Sei $q \in \mathcal{M}$, d. h. es existieren $\alpha \in \,]\,0, 1] : \alpha q \in \mathcal{C}$. Sei außerdem $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Wähle $\alpha' := \frac{\alpha}{\lambda}$. Dann ist auch $\alpha' \in \,]\,0, 1]$, weil mit $\alpha \in \,]\,0, 1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\lambda} \leq 1 \qquad \textit{und} \qquad \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda} > 0$$

Mit diesem α' gilt $(\lambda q) \in \mathcal{M}$, weil:

$$\alpha' \cdot (\lambda q) = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \lambda q = \alpha q \in \mathcal{C}$$

Also ist $\alpha' \cdot (\lambda q) \in \mathcal{C}$ und somit per Definition von $\mathcal{M}$: $\lambda q \in \mathcal{M}$.

$\square$