Musterlösung zu Aufgabe 10)

Seien $n \geq 2$, K Körper, $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$, $b \in \mathrm{K}^{n\times 1}$, und $f: \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ für $x \in \mathrm{K}^n$.

a) Zeigen Sie: f bildet Affinkombinationen von Vektoren in Affinkombinationen von deren Bildern unter f ab.

b) Zeigen Sie: Wenn A zusätzlich intervertierbar ist, dann bildet f Hyperebenen in Hyperebenen ab.

c) Sei nun

$$n = 4, \qquad \mathrm{K} = \mathbb{Q}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und Γ die durch die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ beschriebene Hyperebene.
Bestimmen Sie eine Gleichung für $f(\Gamma)$.

Lösung zu Aufgabe 10 a)

Beh.: Sei $n \geq 2$, K Körper, $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$, $b \in \mathrm{K}^n$ und $f\colon \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ für $x \in \mathrm{K}^n$, dann bildet f Affinkombinationen von Vektoren in Affinkombinationen von deren Bildern unter f ab.

Beweisidee: Um die Behauptung zu beweisen, muss unter den in der Behauptung genannten Bedingungen gezeigt werden, dass wenn $y \in \mathrm{K}^n$ eine beliebige Affinkombination ist, d.h. y von der Form:

$$y = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i a_i,\ \ l \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{K}^n,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\ \ \forall\, 0 \leq i \leq l, \sum_{i=0}^{l} \lambda_i = 1,$$

muss folgen:

$$f(y) = f\left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i f(a_i)$$

Bew.: Sei $n \geq 2$, K Körper, $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$, $b \in \mathrm{K}^n$ und $f\colon \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ für $x \in \mathrm{K}^n$ und $y \in \mathrm{K}^n$ eine beliebige Affinkombination, d. h. entsprechend Def. 14 in Kap. 1 §1 ist

$$y = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i a_i,\ \ l \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathrm{K}^n,\ \lambda_i \in \mathrm{K}\ \ \forall\, 0 \leq i \leq l, \sum_{i=0}^{l} \lambda_i = 1.$$

Einsetzen in f und Umformung ergibt:

$$f(y) \qquad = Ay + b = A\left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i a_i\right) + b = \left(\sum_{i=0}^{l} A\,\lambda_i a_i\right) + b = \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i \underbrace{Aa_i}_{\in \mathrm{K}^n}\right) + b$$

An dieser Stelle ist es möglich, die entscheidende Umformung durchzuführen. Auf Grund der Tatsache, dass K^n ein K-Vektorraum ist und damit ein neutrales Element sowie zu jedem Element aus K^n ein additives inverses Element existiert, lässt sich Aa_i als $Aa_i + 0 = Aa_i + b - b$ darstellen. Damit kann die Gleichung wie folgt fortgeschrieben werden:

$$= \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i (Aa_i + b - b)\right) + b = \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i (Aa_i + b) + \lambda_i(-b)\right) + b$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i (Aa_i + b)\right) + \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i(-b)\right) + b$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i (Aa_i + b)\right) + \underbrace{\left(-b \underbrace{\sum_{i=0}^{l} \lambda_i}_{=1\text{ (lt. Vor.)}}\right)}_{=-b} + b$$

Die Summe $\sum_{i=0}^{l} \lambda_i$ ergibt 1, da es die zur Affinkombination von y gehörigen Skalare sind und deren Summe per Definition 1 ergeben muss. Damit kann man die Gleichung fortsetzen:

$$= \left(\sum_{i=0}^{l} \lambda_i (Aa_i + b) \right) \underbrace{-b + b}_{=0} = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i (Aa_i + b)$$

$$= \sum_{i=0}^{l} \lambda_i f(a_i) \qquad \text{, nach der Definition von } f$$

Letzteres stellt eine Affinkombination dar, da $\sum_{i=0}^{l} \lambda_i = 1$. Dies war zu zeigen.

■

Lösung zu Aufgabe 10 b)

Vorbemerkung: Für den Beweis wird auf die Verwendung von Satz 2 c), Beobachtung 11, Satz 2 e) und Satz 4 e) aus Kap. 1 § 2, entsprechend der elektronischen Nachricht vom 20.11.2009, verzichtet.

Beh.: Sei $n \geq 2$, $\mathbb{K}$ Körper, $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$ invertierbar, $b \in \mathrm{K}^n$ und $f: \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ für $x \in \mathrm{K}^n$ und Γ eine Hyperebene in K^n, dann ist $f(\Gamma)$ eine Hyperebene in K^n.

Bew.: Sei $n \geq 2$, K Körper, $A \in \mathrm{K}^{n\times n}$ invertierbar, $b \in \mathrm{K}^n$ und $f: \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ für $x \in \mathrm{K}^n$ und Γ eine Hyperebene in K^n.

Benutzt man die Darstellung von Γ in der Form eines Stützvektors plus des dazugehörigen Untervektorraums, kann mit Hilfe des eindeutig bestimmten Untervektorraums von Γ und der durch A gegebenen linearen Abbildung die Behauptung bewiesen werden. Sei also: $\Gamma = a + U$ mit $a \in \Gamma, U \subseteq \mathrm{K}^n$ der UVR mit $\dim_{\mathrm{K}}(U) = n - 1$, dann folgt:

$$
\begin{aligned}
f(\Gamma) &= \{f(x) \in \mathrm{K}^n \mid x \in \Gamma\} && \text{, nach der Definition von } f(\Gamma)\\
&= \{f(a+u) \in \mathrm{K}^n \mid u \in U\} && \text{, nach der Darstellung von } \Gamma\\
&= \{A(a+u) + b \mid u \in U\} && \text{, nach Definition von } f\\
&= \{Aa + Au + b \mid u \in U\} && \text{, nach Anwendung des Distributivgesetzes der Matrizenrechnung}\\
&= \left\{ \underbrace{Aa}_{\in \mathrm{K}^n} + \underbrace{b}_{\in \mathrm{K}^n} + \underbrace{Au}_{\in \mathrm{K}^n} \,\middle|\, u \in U \right\} && \text{, Umsortieren (möglich, da Vektorraumaddition kommutativ)}\\
&= \underbrace{(Aa + b)}_{\in f(\Gamma)} + \underbrace{\{Au \mid u \in U\}}_{=:W} && \text{, weil } Aa + b \text{ nicht von } u \text{ abhängig}
\end{aligned}
$$

Damit ist eine Darstellung von $f(\Gamma)$ gefunden, die in den nächsten Schritten zum Beweis der Behauptung hilfreich ist. Mit Hilfe der durch A gegebenen linearen Abbildung begrenzt auf U in Form von $g: U \to \mathrm{K}^n, u \to Au$ wird gezeigt, dass W ein UVR mit $\dim_{\mathrm{K}}(W) = n - 1$ ist.

Zunächst kann festgehalten werden, dass $\mathrm{Kern}(g) = \{0\}$, weil A nach Voraussetzung invertierbar ist (vgl. VL Stein S. 64). Damit folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen:

$$n - 1 = \dim_{\mathrm{K}}(U) = \dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{Kern}(g)) + \dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{Bild}(g)) = 0 + \dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{Bild}(g)) = \dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{Bild}(g))$$

Weiterhin gilt: $\mathrm{Bild}(g) = g(U) = \{Ax \mid x \in U\} = W$. W stellt damit einen UVR mit der Dimension $n - 1$ dar. Es folgt, dass $f(\Gamma) = (Aa + b) + W$ eine Hyperebene in K^n ist. Damit ist gezeigt, dass das Abbild einer Hyperebene unter f wieder eine Hyperebene darstellt und die Behauptung ist bewiesen. ■

Lösung zu Aufgabe 10 c)

Lösung: Zu Beginn kann festgehalten werden, dass 2 die Determinante von A und A daher invertierbar ist. Als nächstes soll eine Parameterdarstellung von Γ ermittelt werden, weil damit $f(\Gamma)$ ebenfalls in einer Parameterdarstellung bestimmt werden kann.

I) Bestimmung einer Parameterdarstellung von Γ:

Nach Voraussetzung ist $\Gamma = \text{Lös}(1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1|\, 1)$ eine Hyperebene in $\mathbb{Q}^4$. Weil

$$(1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$$

folgt:

$$\Gamma = \text{Lös}(1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1|\, 1) \quad = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu-\delta \\ \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{Q} \right\}$$

, „Auseinanderziehen" des Vektors

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{Q} \right\}$$

, Vorziehen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da nicht von λ, μ, δ abhängig

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

II) Bestimmung einer Parameterdarstellung von f(Γ):

Im nächsten Schritt soll $f(\Gamma)$ bestimmt werden. Sei hierzu $x \in \Gamma$, dann gibt es $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{Q}$, sodass

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Es folgt:

$$f(x) \quad = Ax + b$$, nach Definition von f

$$= A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + b$$

$$= A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b + \lambda A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \delta A\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&1&0&2\\0&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&1&0&2\\0&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&1&0&2\\0&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$+ \delta\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&1&0&2\\0&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Damit kann $f(\Gamma)$ wie folgt dargestellt werden:

$$f(\Gamma) = \{Ax + b | x \in \Gamma\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{Q}\right\}$$

, Vorziehen des Vektors, da unabhängig von λ, μ, δ

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}}_{=:w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=:w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{=:w_3} \right\rangle_{\mathbb{Q}}}_{=:W}$$

Entsprechend der linearen Algebra stellen Erzeugendensysteme aus Vektoren eines K -Vektorraumes Untervektorräume dar (vgl. VL Stein S. 50). Aus Aufgabe 10 b) ist wegen der Invertierbarkeit von A bekannt, dass $f(\Gamma)$ eine Hyperebene darstellen muss. Folglich muss, wegen der Eindeutigkeit des zu einem affinen Unterraumes gehörigen Untervektorraumes, W eine Dimension von 3 aufweisen und w_1, w_2, w_3 eine Basis von W bilden.

Mit diesen Vorinformationen ist es möglich, ein Gleichungssystem für $f(\Gamma)$ zu bestimmen. Dabei wird auf den Zusammenhang zurückgegriffen, dass die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems gleich einer speziellen Lösung plus der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist.

III) Bestimmung eines Gleichungssystems zu $f(\Gamma)$:

Suche $\tilde{A} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$: $\tilde{A}w_i = 0$, für alle $1 \leq i \leq 3$, d.h.

$$(\tilde{a}_{11} \quad \tilde{a}_{12} \quad \tilde{a}_{13} \quad \tilde{a}_{14}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (0)$$

$$(\tilde{a}_{11} \quad \tilde{a}_{12} \quad \tilde{a}_{13} \quad \tilde{a}_{14}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$$

$$(\tilde{a}_{11} \quad \tilde{a}_{12} \quad \tilde{a}_{13} \quad \tilde{a}_{14}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$$

Durch die Verwendung der Basisvektoren von W kann man zeigen, dass alle Vektoren aus W das homogene Gleichungssystem erfüllen, indem man einen beliebigen Vektor aus W als Linearkombination der Basisvektoren darstellt und mit $\tilde{A}$ multipliziert. Aus der obigen Darstellung folgt damit für das gesuchte Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rl} \tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{12} + \quad +2\tilde{a}_{14} & = 0 \\ -\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{12} - \tilde{a}_{13} \qquad & = 0 \\ \tilde{a}_{13} \qquad & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} \tilde{a}_{11} = & -\tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{12} = & -\tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{13} = & 0 \end{array}$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass es mehrere Gleichungssysteme gibt, die in Frage kommen. Es wird nun $\tilde{a}_{14} = -1$ gewählt, um die weiteren Rechnungen zu vereinfachen. Daraus ergibt sich: $\tilde{a}_{11} = 1$, $\tilde{a}_{12} = 1, \tilde{a}_{13} = 0$, $\tilde{a}_{14} = -1$ bzw. $\tilde{A} = (1 \quad 1 \quad 0 \quad -1)$

Probe: $\tilde{A}w_i = 0 \;\forall\; 1 \leq i \leq 3$

$$i = 1 \qquad (1 \quad 1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 + 1) - 2 = (0)$$

$$i = 2 \qquad (1 \quad 1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1 + 1 + 0 + 0) = (0)$$

$$i = 3 \qquad (1 \quad 1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)$$

Als nächstes ist zu zeigen, dass W mit $\text{Lös}(\tilde{A}, 0)$ übereinstimmt. Aus dem gewählten Ansatz ergibt sich: $W \subseteq \text{Lös}(\tilde{A}, 0)$. Weiterhin ist $\text{Rg}(\tilde{A}) = 1$. Mit der aus der linearen Algebra bekannten Ranggleichung (vgl. VL Stein S. 63) gilt: $4 = \text{Rg}(\tilde{A}) + \vartheta(\tilde{A}) \Leftrightarrow \vartheta(\tilde{A}) = 4 - \text{Rg}(\tilde{A}) = 4 - 1 = 3$. Die Nullität von $\tilde{A}$ und damit die Dimension von $\text{Lös}(\tilde{A}, 0)$ ist somit 3.

Weil $W \subseteq \text{Lös}(\tilde{A}, 0)$ ein UVR von $\text{Lös}(\tilde{A}, 0)$ ist und $\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Lös}(\tilde{A}, 0)) = 3 = \dim_{\mathbb{Q}}(W)$ ist, folgt aus der linearen Algebra (vgl. VL Stein S. 57): $W = \text{Lös}(\tilde{A}, 0)$.

Mit dieser Information ist es nun möglich, eine Gleichung für $f(\Gamma)$ zu finden, indem der zu Beginn gewählte Stützvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $f(\Gamma)$ mit der Matrix $\tilde{A}$ multipliziert und dadurch eine geeignete rechte Seite der gesuchten Gleichung gefunden wird. Es ergibt sich:

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 + 0 + 0 + 0) = (2)$$

Eine geeignete rechte Seite ist somit in der 2 zu sehen, wobei der gewählte Stützvektor von $f(\Gamma)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $\tilde{A}x = 2$ darstellt. Entsprechend lässt sich die Lösungsmenge des inhomogenen Systems durch diese spezielle Lösung plus der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems darstellen, welche wie oben gezeigt, mit W übereinstimmt. Es folgt also:

$$\begin{aligned} \text{Lös}(\tilde{A}, 2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Lös}(\tilde{A}, 0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + W \\ &= f(\Gamma) \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $\tilde{A}x = 2$ entspricht somit $f(\Gamma)$. Damit wird die Hyperebene unter anderem durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 2$$

■