Beweis von Satz 2 in § 2.

(a) Die Richtung „$\Rightarrow$" ergibt sich, weil die rechts stehende Bedingung schwächer ist als diejenige in Definition 1. Für die entgegengesetzte Richtung liegen immerhin schon eine lineare Abbildung $\ell\colon \overrightarrow{Y} \to \overrightarrow{Y'}$ und ein Punkt $p^* \in Y$ vor, mit denen gilt

$$\underset{q\in Y}{\forall} q \qquad f(q) = f(p^*) + \ell(q - p^*) \ .$$

Seien nun $p, q \in Y$, dann ist

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = f(q) - f(p) = f(p^*) + \ell(q-p^*) \ - \ \big(f(p^*) + \ell(p-p^*)\big) = \ell(q-p^*) - \ell(p-p^*)$$
$$= \ell(q) - \ell(p) \ .$$

Nach Definition 1 ist damit f eine affine Abbildung.

(b) Wenn p, q unabhängig voneinander alle Punkte von Y durchlaufen, dann durchläuft $\overrightarrow{pq}$ alle Vektoren aus $\overrightarrow{Y}$. Die Bedingung in Definition 1 legt daher die lineare Abbildung ℓ schon als Abbildung komplett fest, so dass es höchstens eine solche Abbildung geben kann.

(c) Die Vorschrift für f bedeutet insbesondere, dass $f(p^*) = p^{*\prime}$. Sie kann also auch in der Form $f(q) = f(p^*) + \ell(q - p^*)$ angeschrieben werden. Nun ist nach dem schon bewiesenen Teil (a) von Satz 2 die Abbildung f affin. Man kann den Umweg über Teil (a) aber auch vermeiden und einfach feststellen, dass für die hier vorgegebene Abbildung f mit beliebigen $p, q \in Y$, auf Grund der Linearität von ℓ, gilt

$$f(q) - f(p) = p^{*\prime} + \ell(q - p^*) - \big(p^{*\prime} + \ell(p - p^*)\big) = \ell(q - p) \ .$$

(d) Seien $f : Y \to Y', f' : Y' \to Y''$ zwei affine Abbildungen mit zugehörigen linearen Abbildungen ℓ und ℓ', dann gilt nach Definition 1 für alle $p, q \in Y$:

$$(g\circ f)(q) - (g\circ f)(p) = g(f(q)) - g(f(p)) = \ell'(f(q) - f(p)) = \ell'(\ell(q-p)) = (\ell'\circ\ell)(q-p) \ .$$

(e) Für $z \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned} &z \in f(Y) \\ &\quad \Leftrightarrow \exists y \in Y:\ f(y) = z \Leftrightarrow \exists u \in U:\ f(a+u) = z \Leftrightarrow \exists u \in U:\ f(a) + \ell(u) = z \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow z \in f(a) + \ell(U) \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass die lineare Abbildung ℓ zu f gehört und daher für $q = a+u$ und $p = a$, nach Definition 1, sich die Gleichung $f(a+u) = f(a) + \ell(u)$ ergibt.