EUKLID

DIE ELEMENTE

BUCH I–XIII

Nach Heibergs Text aus dem Griechischen
übersetzt und herausgegeben von

CLEMENS THAER

WISS[illegible]AFTLICHE BUCHGESELLSCHAFT
DARMSTADT

I. Buch.

Definitionen.

1. *Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat,*
2. *Eine **Linie** breitenlose Länge.*
3. *Die Enden einer Linie sind Punkte.*
4. *Eine **gerade Linie** (**Strecke**) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.*
5. *Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.*
6. *Die Enden einer Fläche sind Linien.*
7. *Eine **ebene** Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.*
8. *Ein ebener **Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.*
9. *Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.*
10. *Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**;*

*und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.*

11. ***Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,*
12. ***Spitz**, wenn kleiner als ein Rechter.*
13. *Eine **Grenze** ist das, worin etwas endigt.*
14. *Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.*
15. *Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die **Umfang** (**Bogen**) heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind;*
16. *Und **Mittelpunkt** des Kreises heißt dieser Punkt.*
17. *Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke;*

eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

18. *Ein* ***Halbkreis*** *ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur;*

[und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise].

19. (20—23) ***Geradlinige Figuren*** *sind solche, die von Strecken umfaßt werden,*

dreiseitige *die von drei,*
vierseitige *die von vier,*
vielseitige *die von mehr als vier Strecken umfaßten.*

20. (24—26) *Von den dreiseitigen Figuren ist ein* ***gleichseitiges Dreieck*** *jede mit drei gleichen Seiten,*
ein ***gleichschenkliges*** *jede mit nur zwei gleichen Seiten,*
ein ***schiefes*** *jede mit drei ungleichen Seiten.*

21. (27—29) *Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein* ***rechtwinkliges*** *Dreieck jede mit einem rechten Winkel,*
ein ***stumpfwinkliges*** *jede mit einem stumpfen Winkel,*
ein ***spitzwinkliges*** *jede mit drei spitzen Winkeln.*

22. (30—34) *Von den vierseitigen Figuren ist ein* ***Quadrat*** *jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist,*
ein ***längliches Rechteck*** *jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist,*
ein ***Rhombus*** *jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,*
ein ***Rhomboid*** *jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;*
die übrigen vierseitigen Figuren sollen ***Trapeze*** *heißen.*

23. (35) ***Parallel*** *sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.*

Postulate.

Gefordert soll sein:

1. *Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,*

2. *Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,*

3. *Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,*

4. (Ax. 10) *Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,*

5. (Ax. 11) *Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*

Axiome.

1. *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*
2. *Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.*
3. *Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.*
4. *[Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.]*
5. (6) *[Die Doppelten von demselben sind einander gleich.]*
6. (7) *[Die Halben von demselben sind einander gleich.]*
7. (8) *Was einander deckt, ist einander gleich.*
8. (9) *Das Ganze ist größer als der Teil.*
9. (12) *[Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.]*

§ 1 (A. 1).

Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

Die gegebene Strecke sei $A\,B$. Man soll über der Strecke $A\,B$ ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Mit A als Mittelpunkt und $A\,B$ als Abstand zeichne man den Kreis $B\,C\,D$ (Post. 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und $B\,A$ als Abstand den Kreis $A\,C\,E$; ferner ziehe man vom Punkte C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken $C\,A$, $C\,B$ (Post. 1).

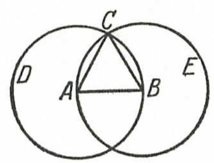

Fig. 1.

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises $C\,D\,B$ ist, ist $A\,C = A\,B$ (I, Def. 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises $C\,A\,E$ ist, $B\,C = B\,A$. Wie oben bewiesen, ist auch $C\,A = A\,B$; also sind $C\,A$

und CB beide $= AB$. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also ist auch $CA = CB$; also sind CA, AB, BC alle drei einander gleich.

Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Def. 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet — dies hatte man ausführen sollen.

§ 2 (A. 2).

An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen.

Der gegebene Punkt sei A und die gegebene Strecke BC. Man soll an dem Punkte A eine der gegebenen Strecke BC gleiche Strecke hinlegen.

Man ziehe von Punkt A nach Punkt B die Strecke AB und errichte über derselben das gleichseitige Dreieck DAB (I, 1), verlängere ferner DA, DB gerade um die Strecken AE, BF (Post. 2) und zeichne mit B als Mittelpunkt und BC als Abstand den Kreis CGH, ebenso mit D als Mittelpunkt und DG als Abstand den Kreis GKL.

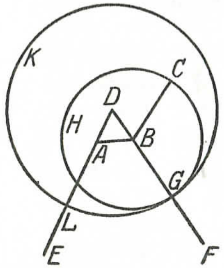

Fig. 2.

Da hier Punkt B Mittelpunkt von CGH ist, ist $BC = BG$. Ebenso ist, da Punkt D Mittelpunkt des Kreises GKL ist, $DL = DG$; von diesen Strecken sind die Teile $DA = DB$. Also sind die Reste $AL = BG$ (Ax. 3). Wie oben bewiesen, ist auch $BC = BG$; also sind AL und BC beide $= BG$. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also ist $AL = BC$.

Also hat man am gegebenen Punkte A eine der gegebenen Strecke BC gleiche Strecke hingelegt, nämlich AL — dies hatte man ausführen sollen.

§ 3 (A. 3).

Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke abzutragen.

Die zwei gegebenen ungleichen Strecken seien AB, c; von ihnen sei AB die größere. Man soll auf AB, der größeren Strecke, eine c, der kleineren, gleiche abtragen.

Man lege am Punkte A eine Strecke $AD = c$ hin (I, 2) und zeichne mit A als Mittelpunkt und AD als Abstand den Kreis DEF.

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises DEF ist, ist $AE = AD$; aber auch $c = AD$. Also sind AE, c beide $= AD$; folglich ist auch $AE = c$.

Also hat man, während zwei ungleiche Strecken AB, c gegeben waren, auf AB, der größeren, eine c, der kleineren, gleiche abgetragen, nämlich AE — dies hatte man ausführen sollen.

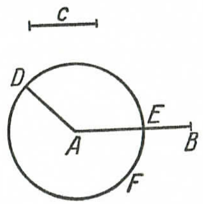

Fig. 3.

§ 4 (L. 1).

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich, dann muß in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich $AB = DE$ und $AC = DF$, ferner $\angle BAC = \angle EDF$. Ich behaupte, daß auch Grdl. $BC =$ Grdl. EF, ferner $\triangle ABC = \triangle DEF$ und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein müssen, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $ABC = DEF$ und $ACB = DFE$.

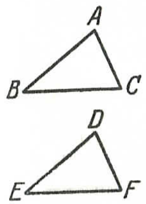

Fig. 4.

Deckt man nämlich $\triangle ABC$ auf $\triangle DEF$ und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie die gerade Linie AB auf DE, so muß auch Punkt B E decken, weil $AB = DE$; da so AB DE deckt, muß auch die gerade Linie AC DF decken, weil $\angle BAC = EDF$; daher muß auch Punkt C Punkt F decken, weil gleichfalls $AC = DF$. B deckte aber E; folglich muß die Grundlinie BC die Grundlinie EF decken [denn würde, während B E und C F deckt, die Grundlinie $B\,C\ \ E\,F$ nicht decken, so würden zwei Strecken einen Flächenraum umfassen; das ist aber unmöglich (Ax. 9). Also muß die Grundlinie $B\,C\ \ E\,F$ decken] und ihr gleich sein (Ax. 7); folglich muß auch das ganze Dreieck $A\,B\,C$ das ganze Dreieck $D\,E\,F$ decken und ihm gleich sein, auch müssen die übrigen Winkel die übrigen Winkel decken und ihnen gleich sein, $A\,B\,C = D\,E\,F$ und $A\,C\,B = D\,F\,E$.

Wenn also in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich, dann muß in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Winkel gegenüberliegen — dies hatte man beweisen sollen.

§ 5 (L. 2).

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein.

$A\,B\,C$ sei ein gleichschenkliges Dreieck (I, Def. 20) mit den Seiten $A\,B = A\,C$, auch seien $A\,B$, $A\,C$ um die geraden Linien $B\,D$, $C\,E$ verlängert. Ich behaupte, daß $\angle\ A\,B\,C = A\,C\,B$ und $C\,B\,D = B\,C\,E$.

Man wähle nämlich auf $B\,D$ Punkt F beliebig, trage auf $A\,E$, der längeren Strecke, $A\,G = A\,F$, der kürzeren, ab (I, 3) und ziehe die Strecken $F\,C$, $G\,B$.

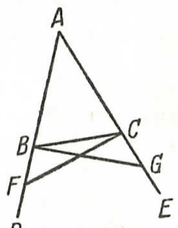

Fig. 5.

Da $A\,F = A\,G$ und $A\,B = A\,C$, so sind zwei Seiten, nämlich $F\,A$, $A\,C$ zwei Seiten, nämlich $G\,A$, $A\,B$ entsprechend gleich, und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, nämlich $F\,A\,G$; also ist Grdl. $F\,C =$ Grdl. $G\,B$, $\triangle\ A\,F\,C = \triangle\ A\,G\,B$, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $A\,C\,F = A\,B\,G$ und $A\,F\,C = A\,G\,B$ (I, 4). Und da die ganzen Strecken $A\,F = A\,G$, sowie von ihnen die Teile $A\,B = A\,C$, so sind die

Reste $B\,F = C\,G$ (Ax. 3). Wie oben bewiesen, ist aber auch $F\,C = G\,B$; mithin sind zwei Seiten, $B\,F$, $F\,C$, zwei Seiten, $C\,G$, $G\,B$ entsprechend gleich; auch ist $\angle\ B\,F\,C = \angle\ C\,G\,B$ und die Grundlinie $B\,C$ ihnen gemeinsam; also muß auch $\triangle\ B\,F\,C = \triangle\ C\,G\,B$ sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, also $\angle\ F\,B\,C = G\,C\,B$ und $B\,C\,F = C\,B\,G$ (I, 4). Da nun, wie oben bewiesen, die ganzen Winkel $A\,B\,G = A\,C\,F$ und von ihnen die Teile $C\,B\,G = B\,C\,F$, so sind die Restwinkel $A\,B\,C = A\,C\,B$; diese liegen an der Grundlinie des Dreiecks $A\,B\,C$. Wie oben bewiesen, ist ferner $F\,B\,C = G\,C\,B$; und diese liegen unter der Grundlinie — S.

§ 6 (L. 3).

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, müssen auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein.

$A\,B\,C$ sei ein Dreieck mit $\angle\ A\,B\,C = \angle\ A\,C\,B$. Ich behaupte, daß auch Seite $A\,B =$ Seite $A\,C$.

Wäre nämlich $A\,B$ ungleich $A\,C$, so wäre von ihnen die eine größer; $A\,B$ sei größer; dann trage man auf $A\,B$, der größeren Strecke, $D\,B = A\,C$, der kleineren, ab und ziehe $D\,C$.

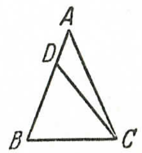

Fig. 6.

Da dann $D\,B = A\,C$ wäre und $B\,C$ gemeinsam, so wären zwei Seiten, nämlich $D\,B$, $B\,C$, zwei Seiten, nämlich $A\,C$, $C\,B$, entsprechend gleich und $\angle\ D\,B\,C = \angle\ A\,C\,B$; also wäre Grdl. $D\,C =$ Grdl. $A\,B$ und $\triangle\ D\,B\,C = \triangle\ A\,C\,B$ (I, 4), das kleinere dem größeren (Ax. 8); dies wäre Unsinn; also kann $A\,B$ nicht ungleich $A\,C$ sein, ist ihm also gleich — S.

§ 7 (L. 4).

Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.

Wäre dies nämlich möglich, so bringe man über derselben Strecke $A\,B$ zwei den festen Strecken $A\,C$, $C\,B$ entsprechend gleiche weitere Strecken $A\,D$, $D\,B$ in verschiedenen Punkten C und D zusammen, und zwar auf derselben Seite und an denselben Enden ansetzend, so daß $C\,A$ und $D\,A$, die an demselben Ende, nämlich A ansetzen, einander gleich sind, ebenso $C\,B$ und $D\,B$, die an demselben Ende B ansetzen; ferner ziehe man $C\,D$.

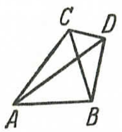

Fig. 7.

Da dann $A\,C = A\,D$, so wäre auch $\angle\, A\,C\,D = A\,D\,C$ (I, 5); also wäre $A\,D\,C > D\,C\,B$ (Ax. 8), um so mehr also $C\,D\,B > D\,C\,B$. Da ebenso $C\,B = D\,B$, so wäre auch $\angle\, C\,D\,B = \angle\, D\,C\,B$. Wie oben bewiesen, wäre er zugleich weit größer als dieser; dies ist aber unmöglich — S.

§ 8 (L.5).

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, dann müssen in ihnen auch die von gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich sein.

$A\,B\,C$, $D\,E\,F$ seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten $A\,B$, $A\,C$ zwei Seiten $D\,E$, $D\,F$ entsprechend gleich sind, nämlich $A\,B = D\,E$ und $A\,C = D\,F$; ferner sei Grdl. $B\,C =$ Grdl. $E\,F$. Ich behaupte, daß auch $\angle\, B\,A\,C = \angle\, E\,D\,F$.

Deckt man nämlich $\triangle\, A\,B\,C$ auf $\triangle\, D\,E\,F$ und legt dabei Punkt B auf Punkt E sowie die gerade Linie $B\,C$ auf $E\,F$, so muß auch Punkt C F decken, weil $B\,C = E\,F$; da so $B\,C$ $E\,F$ deckt, müssen auch $B\,A$, $C\,A$ die Seiten $E\,D$, $D\,F$ decken. Würden nämlich zwar die Grundlinien $B\,C$, $E\,F$ einander decken, die Seiten $B\,A$, $A\,C$ aber $E\,D$, $D\,F$, nicht decken, sondern abweichen wie $E\,G$, $G\,F$, dann hätte man über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden ansetzend auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammengebracht. Sie lassen sich aber nicht so zusammenbringen (I, 7); daß also, wenn man Grdl. $B\,C$ auf Grdl. $E\,F$ deckt, die Seiten $B\,A$, $A\,C$ dabei $E\,D$, $D\,F$

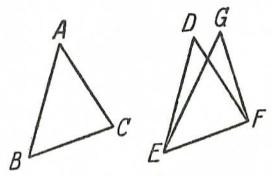

Fig. 8.

nicht deckten, trifft nicht zu. Also decken sie sich, und $\angle\, B\,A\,C$ muß $\angle\, E\,D\,F$ decken und ihm gleich sein (Ax. 7) — S.

§ 9 (A. 4).

Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbieren.

Der gegebene geradlinige Winkel sei $B\,A\,C$. Ihn soll man halbieren.

Auf $A\,B$ wähle man Punkt D beliebig, trage $A\,E = A\,D$ auf $A\,C$ ab, ziehe $D\,E$, errichte über $D\,E$ das gleichseitige Dreieck $D\,E\,F$ (I, 1) und ziehe $A\,F$; ich behaupte, daß $\angle\, B\,A\,C$ durch die gerade Linie $A\,F$ halbiert wird.

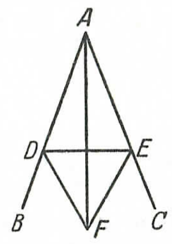

Fig. 9.

Da nämlich $A\,D = A\,E$ ist und $A\,F$ gemeinsam, so sind zwei Seiten $D\,A$, $A\,F$ zwei Seiten $E\,A$, $A\,F$ entsprechend gleich; ferner Grdl. $D\,F =$ Grdl. $E\,F$; also ist $\angle\, D\,A\,F = \angle\, E\,A\,F$ (I, 8).

Der gegebene geradlinige Winkel $B\,A\,C$ wird also durch die gerade Linie $A\,F$ halbiert — dies hatte man ausführen sollen.

§ 10 (A. 5).

Eine gegebene Strecke zu halbieren.

Die gegebene Strecke sei $A\,B$. Man soll die Strecke $A\,B$ halbieren.

Man errichte über ihr das gleichseitige Dreieck $A\,B\,C$ (I, 1) und halbiere $\angle\, A\,C\,B$ durch die gerade Linie $C\,D$ (I, 9); ich behaupte, daß die Strecke $A\,B$ im Punkte D halbiert wird.

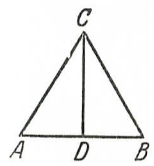

Fig. 10.

Da nämlich $A\,C = C\,B$ ist und $C\,D$ gemeinsam, so sind zwei Seiten $A\,C$, $C\,D$ zwei Seiten $B\,C$, $C\,D$ entsprechend gleich; ferner $\angle\, A\,C\,D = \angle\, B\,C\,D$; also ist Grdl. $A\,D =$ Grdl. $B\,D$ (I, 4).

Die gegebene Strecke $A\,B$ ist also in D halbiert — dies hatte man ausführen sollen.

§ 11 (A. 6).

Zu einer gegebenen geraden Linie rechtwinklig von einem auf ihr gegebenen Punkte aus eine gerade Linie zu ziehen.

Die gegebene gerade Linie sei $A\,B$ und der gegebene Punkt auf ihr C. Man soll vom Punkte C aus rechtwinklig zur geraden Linie $A\,B$ eine gerade Linie ziehen.

Auf $A\,C$ wähle man Punkt D beliebig, trage $C\,E = C\,D$ ab, errichte über $D\,E$ das gleichseitige Dreieck $F\,D\,E$ (I, 1) und ziehe $F\,C$; ich behaupte, daß die gerade Linie $F\,C$ rechtwinklig zu der gegebenen geraden Linie $A\,B$ von dem auf ihr gegebenen Punkte C aus gezogen ist.

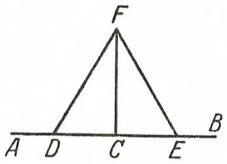

Fig. 11.

Da nämlich $D\,C = C\,E$ ist und $C\,F$ gemeinsam, so sind zwei Seiten $D\,C$, $C\,F$ zwei Seiten $E\,C$, $C\,F$ entsprechend gleich; ferner Grdl. $D\,F =$ Grdl. $F\,E$; also ist $\angle\, D\,C\,F = \angle\, E\,C\,F$ (I, 8); sie sind dabei Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Def. 10); also sind $D\,C\,F$ und $F\,C\,E$ beide Rechte.

Man hat also zu einer gegebenen Strecke $A\,B$ rechtwinklig von einem auf ihr gegebenen Punkte C aus eine gerade Linie gezogen, nämlich $C\,F$ — dies hatte man ausführen sollen.

§ 12 (A. 7).

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot zu fällen.

Es sei $A\,B$ die gegebene unbegrenzte gerade Linie und C der gegebene Punkt, der nicht auf ihr liegt. Man soll auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie $A\,B$ von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot fällen.

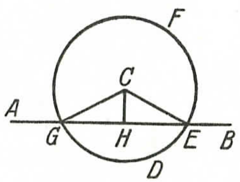

Fig. 12.

Man wähle auf der anderen Seite der geraden Linie $A\,B$ Punkt D beliebig, zeichne mit C als Mittelpunkt und $C\,D$ als Abstand den Kreis $E\,F\,G$, halbiere die Strecke $E\,G$ in H (I, 10) und ziehe die Strecken $C\,G$, $C\,H$, $C\,E$; ich behaupte, daß man auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie $A\,B$ von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot gefällt hat, nämlich $C\,H$.

Da nämlich $G\,H = H\,E$ ist und $H\,C$ gemeinsam, so sind zwei Seiten $G\,H$, $H\,C$ zwei Seiten $E\,H$, $H\,C$ entsprechend gleich; ferner Grdl. $C\,G =$ Grdl. $C\,E$; also ist $\angle\, C\,H\,G = \angle\, E\,H\,C$ (I, 8); sie sind dabei Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter, und die stehende gerade Linie heißt Lot auf die, auf der sie steht (I, Def. 10).

Man hat also auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie $A\,B$ von einem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, das Lot gefällt, nämlich $C\,H$ — dies hatte man ausführen sollen.

§ 13 (L. 6).

Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muß sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden.

Eine gerade Linie $A\,B$ bilde nämlich, auf die gerade Linie $C\,D$ gestellt, die Winkel $C\,B\,A$, $A\,B\,D$. Ich behaupte, daß die Winkel $C\,B\,A$, $A\,B\,D$ entweder beide Rechte sind oder zusammen zwei Rechten gleich.

Ist $C\,B\,A = A\,B\,D$, so sind beide Rechte (I, Def. 10). Anderenfalls ziehe man von Punkt B aus $B\,E \perp C\,D$ (I, 11); $C\,B\,E$, $E\,B\,D$ sind also zwei Rechte. Hier ist $C\,B\,E = C\,B\,A + A\,B\,E$; daher füge man $E\,B\,D$ beiderseits hinzu; dann sind $C\,B\,E + E\,B\,D = C\,B\,A + A\,B\,E + E\,B\,D$ (Ax. 2). Ebenso ist $D\,B\,A = D\,B\,E + E\,B\,A$; daher füge man $A\,B\,C$ beiderseits hinzu; dann sind $D\,B\,A + A\,B\,C = D\,B\,E + E\,B\,A + A\,B\,C$. Wie oben bewiesen, sind aber auch $C\,B\,E + E\,B\,D$ denselben drei Winkeln zusammen gleich; was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also sind auch $C\,B\,E + E\,B\,D = D\,B\,A + A\,B\,C$; aber $C\,B\,E$, $E\,B\,D$ sind zwei Rechte; also sind auch $D\,B\,A + A\,B\,C = 2$ R. — S.

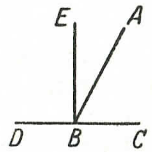

Fig. 13.

§ 14 (L. 7).

Bilden an einer geraden Linie in einem Punkte auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien Nebenwinkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, dann müssen diese geraden Linien einander gerade fortsetzen.

An einer geraden Linie $A\,B$ mögen nämlich in dem Punkte B auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien $B\,C$, $B\,D$ die Nebenwinkel $A\,B\,C$, $A\,B\,D$ bilden, die zusammen $= 2$ R. Ich behaupte, daß $B\,D$ $C\,B$ gerade fortsetzt.

Wenn nämlich $B\,D$ $B\,C$ nicht gerade fortsetzen sollte, möge $B\,E$ $C\,B$ gerade fortsetzen (Post. 2). Da dann die gerade Linie $A\,B$ auf der geraden Linie $C\,B\,E$ stünde, so wären $\angle\,A\,B\,C + A\,B\,E = 2$ R. (I, 13); aber auch $A\,B\,C + A\,B\,D = 2$ R.; also wären $C\,B\,A + A\,B\,E = C\,B\,A + A\,B\,D$ (Post. 4, Ax. 1). Man nehme $C\,B\,A$ beiderseits weg; dann wäre der Restwinkel $A\,B\,E$ dem Restwinkel $A\,B\,D$ gleich (Ax. 3), der kleinere (Ax. 8) dem größeren; dies ist aber unmöglich. Also setzt $B\,E$ nicht $C\,B$ gerade fort. Ähnlich läßt sich zeigen, daß auch keine andere von $B\,D$ verschiedene gerade Linie es tut; also setzt $C\,B$ $B\,D$ gerade fort (Post. 2) — S.

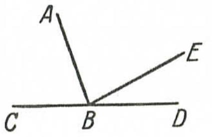

Fig. 14.

§ 15 (L. 8).

Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.

Zwei gerade Linien $A\,B$, $C\,D$ mögen einander im Punkte E schneiden. Ich behaupte, daß $\angle\,A\,E\,C = D\,E\,B$ und $C\,E\,B = A\,E\,D$.

Da nämlich die gerade Linie $A\,E$ auf der geraden Linie $C\,D$ steht und dabei die Winkel $C\,E\,A$, $A\,E\,D$ bildet, so sind $\angle\,C\,E\,A + A\,E\,D = 2$ R. (I, 13). Da ebenso die gerade Linie $D\,E$ auf der geraden Linie $A\,B$ steht und dabei die Winkel $A\,E\,D$, $D\,E\,B$ bildet, so sind $\angle\,A\,E\,D + D\,E\,B = 2$ R. Wie oben bewiesen, sind auch $C\,E\,A + A\,E\,D = 2$ R.; also sind $C\,E\,A + A\,E\,D = A\,E\,D + D\,E\,B$ (Post. 4, Ax. 1). Man nehme $A\,E\,D$ beiderseits weg; dann sind die Reste $C\,E\,A = B\,E\,D$ (Ax. 3); ähnlich läßt sich zeigen, daß auch $C\,E\,B = D\,E\,A$ — S.

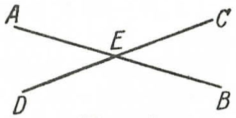

Fig. 15.

[*Zusatz*: Hiernach ist klar, daß zwei gerade Linien, wenn sie einander schneiden, am Schnittpunkte Winkel bilden müssen, die zusammen vier Rechten gleich sind.]

§ 16 (L. 9).

An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Das Dreieck sei $A\,B\,C$; man verlängere seine eine Seite $B\,C$ nach D. Ich behaupte, daß der Außenwinkel $A\,C\,D$ größer ist als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel $C\,B\,A$, $B\,A\,C$.

Man halbiere $A\,C$ in E (I, 10), ziehe $B\,E$ und verlängere es nach F; ferner mache man $E\,F = B\,E$, verbinde $F\,C$ und ziehe $A\,C$ nach G hin durch.

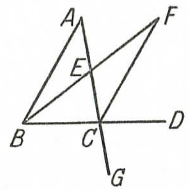

Fig. 16.

Da $A\,E = E\,C$ und $B\,E = E\,F$, so sind zwei Seiten $A\,E$, $E\,B$ zwei Seiten $C\,E$, $E\,F$ entsprechend gleich; ferner $\angle\,A\,E\,B = \angle\,F\,E\,C$ als Scheitelwinkel (I, 15); also ist Grdl. $A\,B =$ Grdl. $F\,C$, $\triangle\,A\,B\,E = \triangle\,F\,E\,C$, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4): also $\angle\,B\,A\,E = E\,C\,F$. Aber $\angle\,E\,C\,D > E\,C\,F$ (Ax. 8); also ist $A\,C\,D > B\,A\,E$. Ähnlich läßt sich, bei Halbierung von $B\,C$, zeigen, daß auch $B\,C\,G$, d. h. $A\,C\,D > A\,B\,C$ — S.

§ 17 (L. 10).

In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.

Das Dreieck sei $A\,B\,C$. Ich behaupte, daß in dem Dreieck $A\,B\,C$ zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner sind als zwei Rechte.

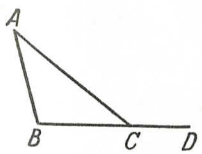

Fig. 17.

Man verlängere $B\,C$ nach D.

Als Außenwinkel am Dreieck $A\,B\,C$ ist dann $\angle\,A\,C\,D$ größer als der gegenüberliegende Innenwinkel $A\,B\,C$ (I, 16). Man füge $A\,C\,B$ beiderseits hinzu; dann sind $A\,C\,D + A\,C\,B > A\,B\,C + B\,C\,A$. Aber $A\,C\,D + A\,C\,B = 2$ R. (I, 13); also sind $A\,B\,C + B\,C\,A < 2$ R. Ähnlich läßt sich zeigen, daß auch $BAC + ACB < 2$ R., desgleichen $CAB + ABC$ — S.

§ 18 (L. 11).

In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

ABC sei ein Dreieck mit der Seite $AC > AB$. Ich behaupte, daß auch $\angle ABC > BCA$.

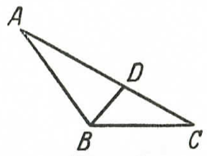

Fig. 18.

Hier ist $AC > AB$; man trage daher $AD = AB$ ab und ziehe BD.

Als Außenwinkel am Dreieck BCD ist dann $\angle ADB$ größer als der gegenüberliegende Innenwinkel DCB (I, 16); aber $ADB = ABD$, da die Seite $AB = AD$ (I, 5); also ist auch $ABD > ACB$, um so mehr $ABC > ACB$ (Ax. 8) — S.

§ 19 (L. 12).

In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

ABC sei ein Dreieck mit $\angle ABC > BCA$. Ich behaupte, daß auch die Seite $AC > AB$.

Anderenfalls wäre AC nämlich entweder $=$ oder $< AB$. Gleich AB kann AC nicht sein; denn sonst wäre auch $\angle ABC = ACB$ (I, 5); dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht $AC = AB$. Aber auch $< AB$ kann AC nicht sein; denn sonst wäre auch $\angle ABC < ACB$ (I, 18); dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht $AC < AB$. Wie oben bewiesen, sind sie auch nicht gleich. Also ist $AC > AB$ — S.

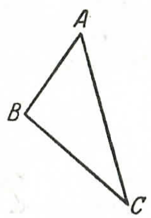

Fig. 19.

§ 20 (L. 13).

In jedem Dreieck sind zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte.

Das Dreieck sei ABC. Ich behaupte, daß in dem Dreieck ABC zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer sind als die letzte: $BA + AC > BC$, $AB + BC > AC$ und $BC + CA > AB$.

Man verlängere BA nach Punkt D, mache $AD = CA$ und ziehe DC.

Da $DA = AC$, ist auch $\angle ADC = ACD$ (I, 5); also $BCD > ADC$ (Ax. 8); und da DBC ein Dreieck ist mit $\angle BCD > BDC$, dem größeren Winkel aber die größere Seite gegenüberliegt (I, 19), so ist $DB > BC$. Aber $DA = AC$; also sind $BA + AC > BC$. Ähnlich läßt sich zeigen, daß auch $AB + BC > CA$ und $BC + CA > AB$ — S.

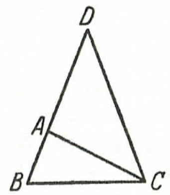

Fig. 20.

§ 21 (L. 14).

Sind in einem Dreieck über einer seiner Seiten von ihren Enden aus zwei Strecken innerhalb zusammengebracht, so müssen die zusammengebrachten Strecken kleiner sein als die beiden übrigen Dreiecksseiten zusammen, dabei aber den größeren Winkel umfassen.

Im Dreieck ABC seien nämlich über BC, einer seiner Seiten, von ihren Enden B, C aus zwei Strecken BD, DC innerhalb zusammengebracht. Ich behaupte, daß BD und DC zusammen kleiner als die beiden übrigen Dreiecksseiten $BA + AC$ sind, dabei aber den größeren Winkel umfassen, nämlich $BDC > BAC$.

Man verlängere BD nach E. Da in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die letzte (I, 20), so sind im Dreieck ABE die zwei Seiten $AB + AE > BE$; man füge EC beiderseits hinzu; dann sind $BA + AC > BE + EC$. Ebenso sind im Dreieck CED die zwei Seiten $CE + ED > CD$; man füge daher DB beiderseits hinzu; dann sind $CE + EB > CD + DB$. Wie oben bewiesen, sind $BA + AC > BE + EC$; um so mehr sind $BA + AC > BD + DC$.

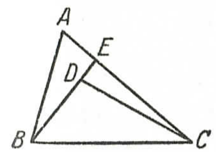

Fig. 21.

Zweitens ist, da an jedem Dreieck der Außenwinkel größer als der gegenüberliegende Innenwinkel ist (I, 16), am Dreieck CDE der Außenwinkel $BDC > CED$. Aus demselben Grunde ist auch am Dreieck ABE der