Modul Geometrie — 4. Januar 2010

Wintersemester 2009-2010

Schmale

Aufgaben

(19) Sei ℓ_A die durch die folgende Matrix A gegebene lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$:

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- **(a)** Klären Sie mit Ihren Kenntnissen aus der linearen Algebra, dass ℓ_A eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$ ist und zwar eine Drehung um 0. Bestimmen Sie den Kosinus des Drehwinkels und ungefähr den entsprechenden Drehwinkel in Grad.
- **(b)** Bestimmen Sie zu zwei linear unabhängigen Vektoren u und w der Länge 1 im $\mathbb{R}^2$ durch Angabe der Matrix bezüglich der kanonischen Basis die Spiegelung $h_{u,w}$ an einer Geraden durch 0 mit der Eigenschaft $h_{u,w}(u) = w$.[10]
- **(c)** Bestimmen Sie als Beispiel zu (b) die Spiegelung ℓ_1 , die die erste Spalte von A auf den ersten kanonischen Basisvektor $e^{(1)}$ abbildet.
- **(d)** Sei schließlich $\ell_2 := \ell_1 \circ \ell_A$. Es ist dann zwangsläufig $\ell_A = \ell_1 \circ \ell_2$. Rechnen Sie dies nach und zeigen Sie, dass auch ℓ_2 eine Spiegelung der in (b) eingeführten Art ist, dass also mit geeigneten Vektoren u', w' gilt: $\ell_2 = h_{u',w'}$.

(20) Zeigen Sie:

- (i) Ist f eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$, dann existiert eine Umkehrabbildung f^{-1} und diese ist auch eine Bewegung.
- (ii) Eine Bewegung f des $\mathbb{R}^n$ bildet eine Kugel ($\mathcal{K}_{q,\epsilon}$) um einen Punkt q ab in eine Kugel um den Punkt $f(q)$ mit gleichem Radius.
- (iii) Eine Bewegung f des $\mathbb{R}^n$ bildet innere Punkte von Teilmengen M des $\mathbb{R}^n$ ab in innere Punkte von $f(M)$.
- (iv) Gilt Letzteres auch für Affinitäten des $\mathbb{R}^n$?

Die Aufgabe (20) ist wie viele weitere Aufgaben eine Standardaufgabe, wie Sie sie in ähnlicher Struktur im Studium sicher schon oft vorgefunden haben. Sie ist so unterteilt, dass man sie wohl auch standardmäßig bearbeiten kann. Sie müssen dabei gängige Definitionen anfassen und kommen am Ende zu einer grundlegenden Eigenschaft, hier von Bewegungen. Viel schwieriger wird es, wenn man diesen Lehrpfad ein wenig verlässt und versucht, geometrische Vermutungen, zu denen man selbst gekommen ist analytisch nachzuweisen. Beim Benutzen dynamischer Geometrie-Software, zum Beispiel entstehen solche Situationen häufig. Die folgende Aufgabe will ein Beispiel in dieser Richtung geben. Ich kenne den Beweis übrigens noch nicht. Für die erste-beste-korrekte analytische Lösung vergebe ich ein Exemplar des neuesten Atlas der Globalisierung von „Le Monde Diplomatique" [11].

(⋆⋆⋆) Benutzen Sie das Applet `4Punkte`, das Sie über die Vorlesungsseite erreichen können. Dort sind für ein nicht ausgeartetes konvexes Viereck die Höhenschnittpunkte der vier durch die Diagonalen vorgegebenen Dreiecke konstruiert und dann verbunden. Die Farbe der Höhenschnittpunkte gibt jeweils die Farbe des zugehörigen Dreiecks wieder. Ist die durch Verbinden der Höhenschnittpunkte entstehende Figur tatsächlich ein Parallelogramm?

⋆⋆⋆ Guten Start nach 2010 ! ⋆⋆⋆

---

[10] $h_{u,w}$ ist eine so genannte Householder-Transformation, hier, im Spezialfall einer Ebene, etwas anders dargestellt als im allgemeinen Fall üblich. Householder-Transformationen spielen eine wichtige Rolle in der numerischen Mathematik. Sie ermöglichen es, die numerisch oder unter Anwendungsgesichtspunkten oft ungünstigen elementaren Zeilenumformungen zur Lösung linearer Gleichungssysteme zu ersetzen durch orthogonale Umformungen. In der analytischen Geometrie können Sie als Hilfsmittel interpretiert werden, zur Darstellung orthogonale Abbildungen (Bewegungen mit Fixpunkt 0) als Hintereinanderausführung von Spiegelungen.

[11] `www.monde-diplomatique.de/atlas`