Aufgaben

(23) In dieser Aufgabe soll in einer stark vereinfachten Konstellation ein typisches Problem dynamisierter geometrischer Konstruktionen veranschaulicht werden.[13] Seien in $\mathbb{R}^2$ die Eckpunkte eines Dreiecks gegeben als

$$a = -2\,e^{(1)},\ b = 2\,e^{(1)},\ c = \lambda\,(e^{(1)} + 3\,e^{(2)})\ .$$

(a) Berechnen Sie den Höhenschnittpunkt h und den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m in Abhängigkeit von λ. Nun soll der Punkt c sich frei auf der Bahn $\langle e^{(1)} + 3\,e^{(2)}\rangle_{\mathbb{R}}$ bewegen dürfen. Was beobachten Sie, wenn der Punkt c über den 0-Punkt hinweg fährt? Wie würden Sie in diesem Bereich den Lauf von m und h erklären?

(b) Wir betten nun die Konstellation ein in $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix}$$

und betrachten dann statt der Punkte a, b, c, h, m etc. aus (a) die durch sie erzeugten eindimensionalen Unterräume $\langle \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \begin{bmatrix} h \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \cdots$ Statt eines Punktes wandert nun ein „Strahl". Begründen Sie nun „anschaulich in Worten" mit Hilfe der „Strahlenwanderung" warum im Applet „Punktwanderung" auf der Vorlesungsseite h und m genau auf diese Weise wandern.

(24) [14] Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einem Beispiel aus der Bemerkung 4 (b) in §7. Seien $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ und $g = x_1 - \lambda x_3 - 1$ Polynome aus $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Die Ebene $E = \mathcal{V}^3_{\mathbb{R}}(g)$ schneidet $\mathcal{V}^3_{\mathbb{R}}(\varphi)$. Bestimmt werden soll ein Polynom h in $\mathbb{R}[y_1, y_2, y_3]$, das die Schnittmenge $\mathcal{V}^3_{\mathbb{R}}(g) \cap \mathcal{V}^3_{\mathbb{R}}(\varphi)$ bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der Ebene E als Nullstellenmenge $\mathcal{V}^2_{\mathbb{R}}(h)$ hat.
Verlegen Sie dazu mit Hilfe einer Bewegung das Koordinatensystem $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ so, dass der Nullpunkt und zwei der neuen Koordinatenvektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ in E liegen und führen Sie die entsprechende Variablensubstitution bei den gegebenen Polynomen aus. Wenn Sie sich nicht verrechnet haben, geht dabei das Polynom g über in ein lineares Polynom ohne konstanten Term, in dem nur noch eine Variable auftritt. Es soll nun ein Polynom h aus $\mathbb{R}[y_1, y_2, y_3]$ ermittelt werden, das die Schnittkurve in der Ebene bezüglich der neuen Koordinaten als Nullstellenmenge in $\mathbb{R}^2$ hat.[15]
Zeichnen Sie[16] mit geeigneter Software die Schnittkurven für die speziellen Werte $\lambda = 0, 1, 2$.

....

[13] Dabei geht es nicht darum, genau so vorzugehen, wie dies etwa bei Cinderella der Fall ist, sondern nur darum, auf einen interessanten Problemkreis im Zusammenhang mit dynamischer Geometrie-Software zu verweisen.

[14] Als Anleitung für diese Aufgabe kann teilweise auch die die Musterlösung der Aufgaben (27/28) aus dem Modul Geometrie 2008/2009 dienen.

[15] Nur zwei der drei y-Variablen dürfen darin dann noch auftreten!

[16] Dieser letzte Satz ging versehentlich beim verteilten Aufgabenblatt verloren.