Aufgaben

(25) Eine Zerlegung von $\mathbb{P}^n_K$.[17] Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}(K^{n+1})$,

$$\mathcal{A}_0 = \{p \in \mathbb{P}^n_K \ : \ \exists v \in p : \ v_0 \neq 0\},\ \mathcal{P}_0 = \mathbb{P}^n_K \setminus \mathcal{A}_0$$

und für $1 \leq i \leq n$

$$\mathcal{A}_i = \{p \in \mathbb{P}^n_K : \ \exists v \in p : \ v_0 = \cdots = v_{i-1} = 0, v_i \neq 0 \ \}, \quad \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{i-1} \setminus \mathcal{A}_i \ .$$

Dabei wurden die Vektoren $v \in \mathbb{P}^n_K$ geschrieben als $v = {}^{\mathsf{t}}[v_0 \,, \quad \cdots \quad , v_n]$ entsprechend der kanonischen Basis $e^{(0)}, \ldots, e^{(n)}$ von K^{n+1}. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing$, wenn $i \neq j$ und $\mathbb{P}^n_K = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{A}_i$.

(b) $\mathcal{P}_i$ ist ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}^n_K$, es ist $\mathsf{dim}\ \mathcal{P}_n = -1$ und $\mathsf{dim}\ \mathcal{P}_i = \mathsf{dim}\ \mathcal{P}_{i+1} + 1$ für $0 \leq i \leq n-1$.

(c) Sei $\mathcal{G}_i$ die Menge der (projektiven) Geraden von $\mathbb{P}^n_K$, auf denen mindestens zwei verschiedene Punkte aus $\mathcal{A}_i$ liegen. Für das Tripel $(\mathcal{A}_i, \mathcal{G}_i, \in)$ gelten teilweise die Axiome $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}$ aus Kapitel 0, und zwar $\boldsymbol{A_1}$ für $i \leq n$, $\boldsymbol{A_2}$ für $i \leq n-2$, $\boldsymbol{A_3}$ für $i = n-2$.
Im Falle $i = n-2$ liegt demnach eine ebene affine Inzidenzgeometrie vor.

Sie können diese Aufgabe so wie gestellt oder im Spezialfall $n = 2$ bearbeiten.

(26) Gebrochen lineare Transformationen und projektive Gerade.

Zu einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, betrachten wir die projektive Abbildung $f : \ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \langle x \rangle \mapsto \langle Ax \rangle$, wobei hier $\langle \ \cdot \ \rangle$ statt $\langle \ \cdot \ \rangle_{\mathbb{R}}$ geschrieben wurde. Sei $H = e^{(1)} + \langle e^{(2)} \rangle$. H ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$! Wir benutzen das Symbol ∞ wie in der Funktionentheorie üblich und setzen fest $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\overline{H} := H \cup \{ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \end{bmatrix} \}$.
Die projektive Abbildung f induziert nun folgende Abbildung

$$\alpha : \ \overline{H} \to \overline{H} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \mapsto \left\{ \begin{matrix} f(\langle \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \rangle) \cap H, \text{ wenn } f(\langle \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \rangle) \neq \langle e^{(2)} \rangle \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \end{bmatrix} \quad \text{wenn } f(\langle \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \rangle) = \langle e^{(2)} \rangle \end{matrix} \right\} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} f(\langle e^{(2)} \rangle) \cap H, \text{ falls } f(\langle e^{(2)} \rangle) \neq \langle e^{(2)} \rangle \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \infty \end{bmatrix} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie $\alpha(\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a_{21}+a_{22}t}{a_{11}+a_{12}t} \end{bmatrix}$ für $t \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\alpha_{|H}$ ist genau dann eine affine Abbildung von H nach H, wenn $\langle e^{(2)} \rangle$ ein Fixpunkt von f ist.

---

[17] Diese und die folgende Aufgabe sind u.A. angeregt durch den Abschnitt „Projektive Geometrien" in dem Buch *Codierungstheorie* von Wolfgang Willems, de Gruyter, 1999. Ihr Gegenstand gehört allerdings in beiden Fällen zu den Grundlagen projektiver Geometrie, siehe z.B. [F] Seite 147 ff. oder [RO] Seite 78 ff. Ausgedehnt auf komplexe Zahlen spielen die gebrochen linearen Funktionen, dann auch Möbius-Transformationen genannt, eine wichtige Rolle in in der Funktionentheorie und deren Anwendungen (z.B. Elektrotechnik). Sie können auch benutzt werden, um wunderschöne und zugleich mathematisch tiefsinnige Bilder zu erzeugen, wie etwa in dem Buch „Indra's Pearls" siehe u.A. `http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/`. An einigen Universitäten sind sie auch ein Thema der Elementargeometrie.