Aufgaben

(3) Seien $P = \mathbb{Z}^2$, $G = \{a + \mathbb{Z}u : \ a, u \in \mathbb{Z}^2, u \neq 0\}$ und I die folgende Relation auf $P \times G$:

$$\text{für alle } a \in P \ \text{ und für alle } g \in G : \ a \, I \, g \text{ genau dann, wenn } \ a \in g \ .$$

Überprüfen Sie die Gültigkeit der Axiome A_1, A_2, A_3, A_4. Dabei dürfen Sie voraussetzen, dass diese Axiome in der affinen Inzidenzgeometrie $(\mathbb{Q}^2, \{\text{eindimensionale affine Unterräume}\}, \in)$ gelten.

(4) Sei (P, G, I) eine ebene affine Inzidenzgeometrie und seien f, g, h aus G paarweise nicht parallel (vgl. Beobachtung 6). Zu $x \in P \setminus P_h$ sei h_x die nach A_3 eindeutige Parallele zu h durch x. Wenn $x \, I \, h$, bzw. $x \in P_h$, dann sei $h_x = h$. Zeigen Sie:

- **(a)** Für $x, x' \in P$: $\quad P_{h_x} \cap P_{h_{x'}} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \ h_x = h_{x'}$.
- **(b)** Für $x, x' \in P$ mit $x, x' \, I \, f$: $\qquad h_x = h_{x'} \ \Leftrightarrow \ x = x'$.
- **(c)** Die Abbildung $\varphi : P_f \to P_g, x \mapsto h_x \wedge g$ ist bijektiv, m.a.W. P_f und P_g sind „gleich mächtig“.