Modul Geometrie 2. November 2009

Wintersemester 2009-2010

Schmale

Aufgaben

(5) Sei K ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik. Sei Γ eine Teilmenge von K^{n} [3] mit der Eigenschaft:

$$\forall\, a, b \in \Gamma : \quad \frac{1}{2}(a+b) \in \Gamma$$

Γ ist dann also abgeschlossen hinsichtlich Mittelpunkten.

Klären Sie für $K = \mathbb{Z}_3$ und $K = \mathbb{Z}_5$, ob Γ ein affiner Unterraum von K^n ist.

(6) Sei $R = \mathbb{Q}[x]$ der Ring der Polynome mit rationalen Koeffizienten. Wir schreiben die Polynome f aus R wie folgt:

$$f = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d \ .$$

Seien x_0, x_1, x_2 paarweise verschieden aus $\mathbb{Q}$ und c_0, c_1, c_2 aus $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie

$$\Gamma = \{f \in R : \ f(x_i) = c_i, 0 \le i \le 2\} \text{ und } \Lambda = \{f \in R : f''(1) = 1\}$$

Sind affine Unterräume des $\mathbb{Q}$-Vektorraums R.

(b) Seien $R_n = \{f \in R : \ \mathsf{deg}\, f < n \text{ oder } f = 0\}$, $\Gamma_n = \Gamma \cap R_n$ und $\Lambda_n = \Lambda \cap R_n$.

Bestimmen Sie $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\, \Gamma_n$ und $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\, \Lambda_n$,

oder, als Alternative,

setzen Sie

$$n = 4, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 1$$

und bestimmen Sie $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\, \Gamma_4, \mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\, \Lambda_4$ und klären Sie, ob $\Gamma_4 \cap \Lambda_4 \neq \varnothing$.

....

[3] Sie können, wenn Ihnen das lieber ist, ruhig n=2 voraussetzen!