

### Aufgaben

- (9) Zwei Geraden in einem affinen Raum heißen *windschief*, wenn sie nicht in einer Ebene liegen.

Sei  $K$  ein Körper, seien  $\Gamma, \Gamma'$  zwei windschiefe Geraden im  $K^n$ , und  $a, b$  bzw.  $a', b'$  je zwei verschiedene Punkte auf  $\Gamma$  bzw.  $\Gamma'$ . Wenn Sie wollen, können Sie  $n = 3$  und  $K \subseteq \mathbb{C}$  annehmen.

Zeigen Sie: Die Geraden  $a \vee a', b \vee b'$  sind windschief.

- (10) Seien  $n \geq 2$ ,  $K$  ein Körper,  $A \in K^{n \times n}$ ,  $b \in K^{n \times 1}$  und  $f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$  mit  $f(x) = Ax + b$  für  $x \in K^{n \times 1}$ .

(a) Zeigen Sie:  $f$  bildet Affinkombinationen von Vektoren in Affinkombinationen von deren Bildern unter  $f$  ab.

(b) Zeigen Sie: Wenn  $A$  zusätzlich invertierbar ist, dann bildet  $f$  Hyperebenen in Hyperebenen ab.

(c) Seien nun

$$n = 4, \quad K = \mathbb{Q}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und  $\Gamma$  die durch die Gleichung  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$  beschriebene Hyperebene.

Bestimmen Sie eine Gleichung für  $f(\Gamma)$ .