Modul Geometrie 23. November 2009

Wintersemester 2009-2010

Schmale

Aufgaben

(11) Seien $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$ affin unabhängige Punkte in $\mathbb{Q}^2$ und p ein weiterer Punkt, der mit keinen zwei der $a^{(i)}$ zusammen kollinear ist.
Wenn Sie das Applet „Punkt als Schwerpunkt“ auf der Vorlesungsseite im Internet benutzen, dann werden Sie feststellen, dass es **viele** Möglichkeiten gibt, die Punkte $a^{(i)}$ auf den fest zu lassenden blauen Geraden in neue Punkte $b^{(i)}$ so zu verschieben, dass $p = \frac{1}{3}(b^{(0)} + b^{(1)} + b^{(2)})$ ist, p also zum so genannten (geometrischen) Schwerpunkt der drei Punkte $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}$ wird.

(a) Zeigen Sie: Wenn man nur zwei der drei Punkte verschiebt, dann gibt es **genau eine** Möglichkeit.

(b) Zeigen Sie: Wenn Sie die $a^{(i)}$ entsprechend der baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ des Punktes p bezüglich $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$ verschieben zu den Punkten

$$b^{(i)} = p + \lambda_i \cdot (a^{(i)} - p) \ ,$$

dann ist p der Schwerpunkt der $b^{(i)}$.

Gilt dies nur für die baryzentrischen Koordinaten?

(12) Gegeben sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^4$:

$$a^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\ a^{(1)} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\\1\end{bmatrix},\ a^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\3\\0\\2\end{bmatrix},\ b^{(0)} = a^{(0)},\ b^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\3\\0\\2\end{bmatrix},\ b^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\3\end{bmatrix} \ .$$

Seien weiter $\Gamma = a^{(0)} \vee a^{(1)} \vee a^{(2)}, \Delta = b^{(0)} \vee b^{(1)} \vee b^{(2)}$ und $f : \Gamma \to \Delta, g : \Delta \to \Gamma$ die nach Satz 10 in §2 durch die Vorgaben

$$f(a^{(i)}) = b^{(i)}, g(b^{(i)}) = a^{(i)},\ \text{für } 0 \le i \le 2$$

bestimmten affinen Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) f ist bijektiv und $g = f^{-1}$.

(b) Es gibt genau eine affine Abbildung $h : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ derart, dass

$$h_{|\Gamma} = f \text{ und } h_{|\Delta} = g \ .$$

(c) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit der gilt:

$$h(q) = a^{(0)} + A(q - a^{(0)}) \ .$$