Modul Geometrie 30. November 2009

Wintersemester 2009-2010

Schmale

Aufgaben

(13) (a) Seien $c \in \mathbb{Q}^{1\times n} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{Q}$, $\Gamma = \mathsf{L\ddot{o}s}\,(c,d) = \{p \in \mathbb{Q}^{n\times 1} : \; cp = d\}$ und seien a, b zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{Q}^{n\times 1}$, die nicht auf Γ liegen.
Zeigen Sie: $[a,b]$ und Γ haben genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn

$$(ca - d)(cb - d) < 0 \; .$$

(b) Zeigen Sie im Kontext des Beispiels 4(e) in §3 dass auch die Menge $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{Y,v}$ der Punkte mit positiver v-Koordinate konvex ist. $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{Y,v}$ wird üblicherweise als Menge der inneren Punkte oder als Inneres des Halbraumes bezeichnet.

(14) Affinkombinationen und Vorzeichen, eine (leicht veränderte) Aufgabe aus Mainz.
Seien $a := {}^{\mathsf{t}}(1,2), b := {}^{\mathsf{t}}(-3,3), c := {}^{\mathsf{t}}(-2,-3) \in \mathbb{R}^2$ verschieden. Wir wissen, dass sich jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ eindeutig als Affinkombination $\lambda a + \mu b + \nu c$ schreiben lässt.

(a) Bestimmen Sie die Mengen der Punkte, an denen jeweils λ, μ bzw. ν verschwindet.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte an denen z.B. λ nicht negativ ist, eine Halbebene ist (Halbraum bei Dimension 2) und stellen Sie als Beispiel den Bereich der Punkte, an denen $\lambda > 0, \mu < 0$ und $\nu > 0$, als Schnittmenge der inneren Punkte von Halbebenen dar (vgl. Aufgabe (13)(b)).

(c) Zerlegen Sie die Ebene in Bezug auf das Vorzeichenverhalten der λ, μ, ν (positiv, negativ oder Null) in Teilmengen und zeichnen sie diese.
Hinweis: Von den 27 denkbaren Vorzeichenkombinationen können einige nicht auftreten. Welche?