Modul Geometrie 14. Dezember 2009

Wintersemester 2009-2010

Schmale

Aufgaben

(17) Gegeben seien paarweise verschiedene Punkte $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$ in $\mathbb{R}^n$. Sie können auch einfach $n = 2$ annehmen. Sei $j \in \{1, \dots, r\}$. Die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^n$, deren Abstand von $a^{(j)}$ kleiner ist als von allen übrigen Punkten $a^{(i)}$ mit $i \neq j$ heißt Voronoi-Zelle[5] von $a^{(j)}$. Wir bezeichnen Sie mit $V(a^{(j)})$. Die Definition besagt:

$$V(a^{(j)}) = \left\{ c \in \mathbb{R}^n : \ \| \, c - a^{(j)} \, \| \ \leq \| \, c - a^{(i)} \, \| \ \text{für } 1 \leq i \leq r \right\}$$

$V(a^{(1)}), \dots, V(a^{r)})$ zusammen ergeben das so genannte Voronoi-Diagramm, das man etwa im Falle $n = 2$ durch Zeichnen der Ränder der Zellen veranschaulichen kann.

(a) Zeigen Sie direkt aus obiger Definition[6] im Spezialfall $r = 2$ oder allgemein:

Voronoi-Zellen sind konvex.

(b) Zeichnen Sie im Fall $n = 2$ sorgfältig die Voronoi-Diagramme für die Punkte

$$0, 2\, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(1)} + 2\, e^{(2)}$$

und für die Punkte

$$0, 3\, e^{(1)}, 2\, e^{(2)}, e^{(1)} + e^{(2)} \ .$$

(18) Sei Y eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, etwa $Y = a + U$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und einem $(n-1)$ - dimensionalen Untervektorraum U. Sie können auch einfach $n = 2$ annehmen. Außerdem sei vorausgesetzt, dass $a \notin U$ und $a \perp U$ [7]

(a) Zeigen Sie [8]:

Ein Punkt p des $\mathbb{R}^n$ liegt genau dann nicht im Halbraum $\mathcal{H}_{Y,\,a}$, wenn die Strecke $[p, a]$ einen Punkt q enthält mit $\| \, q \, \| < \| \, a \, \|$.

(b) Sei nun zusätzlich C eine konvexe Menge, $\boldsymbol{0 \notin \overline{C}, \, a \in C}$ und es gelte

$$\| \, a \, \| = \inf_{c \in C} \| \, c \, \| \ .$$

Zeigen Sie: $\quad C \subseteq \mathcal{H}_{Y,\,a}$ [9]

⋆ ⋆

Schöne Feiertage!

⋆ ⋆

[5] Informationen zum Namen und Interessantes zur Bedeutung dieser Zellen finden Sie z.B. in [L] im Abschnitt 4.4.

[6] Quadrieren der Ungleichungen, geeignete Längenquadrate abziehen, konvex kombinieren, geeignetes neues Längenquadrat dazu tun, ... hilft dabei.

[7] d.h.: $\forall u \in U : \ a \perp u$.

[8] Auch hier ist es günstiger, die Längenquadrate zu betrachten. Dabei sollte ein Punkt p aus $\mathbb{R}^n$ dargestellt sein als $a + u + \lambda a$ mit $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Gibt es dann eine Konvexkombination aus p und a, derart dass...?

[9] Dies ergänzt die Beweisskizze zu Satz 20 in § 3.