Ausarbeitung einer Aufgabe für die Übungen am 6. und 7. Januar 2010

„Invarianz der Eigenschaft 'Höhenschnittpunkt' unter Bewegungen“:

Seien a, b, c affin unabhängige Punkte aus $\mathbb{R}^2$ und $f \in \mathscr{B}(2)$.

In der Vorlesung wurden die Höhen eines Dreiecks auf zwei verschiedene Arten dargestellt.Z.B. war im Falle der Höhe durch den Punkt a im Dreieck a, b, c

$$H_a = a + (b-c)^\perp = \{\ x \in \mathbb{R}^2 :\ (\!(x\,, b-c)\!) = (\!(a\,, b-c)\!)\ \}\ .$$

Entsprechend gilt für die Höhe $H_{f(a)}$ durch $f(a)$ im Dreieck $f(a), f(b), f(c)$

$$H_{f(a)} = f(a) + (f(b)-f(c))^\perp = \{\ y \in \mathbb{R}^2 :\ (\!(y\,, f(b)-f(c))\!) = (\!(f(a)\,, f(b)-f(c))\!)\ \}\ .$$

Die Invarianz der Eigenschaft 'Höhenschnittpunkt' unter Bewegungen kann z.B. wie folgt nachgewiesen werden:

(i) Zeige für $f \in \mathscr{B}(2)$: $f(H_a) = H_{f(a)}$, wobei H_a sich auf das Dreieck a, b, c und $H_{f(a)}$ auf das Dreieck $f(a), f(b), f(c)$ bezieht.

(ii) Folgere das gleiche für H_b und H_c.

(iii) Folgere die Invarianz.

zu (i):

$f \in \mathscr{B}(2)$ hat eine Darstellung der Form $f = T_u \circ \ell$ mit $u = f(0)$ und einer metrischen Abbildung ℓ.[1] f angewendet auf H_a ergibt nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
f(H_a) &= \{f(x) :\ (\!(x\,, b-c)\!) = (\!(a\,, b-c)\!)\ \} \\
&\underset{\ell \text{ metrisch}}{=} \{f(x) :\ (\!(\ell(x)\,, \ell(b-c))\!) = (\!(\ell(a)\,, \ell(b-c))\!) \\
&\underset{\substack{\text{metrische Abbildungen} \\ \text{sind linear}}}{=} \{f(x) :\ (\!(\ell(x)\,, \ell(b)-\ell(c))\!) = (\!(\ell(a)\,, \ell(b)-\ell(c))\!) \\
&=^{(2)} \{f(x) :\ (\!(\ell(x)+u\,, \ell(b)+u-(\ell(c)+u))\!) = (\!(\ell(a)+u\,, \ell(b)+u-(\ell(c)+u))\!) \\
&= \{\ f(x) :\ (\!(f(x)\,, f(b)-f(c))\!) = (\!(f(a)\,, f(b)-f(c))\!)\ \} \\
&\underset{f \text{ bijektiv}}{=} \{y :\ (\!(y\,, f(b)-f(c))\!) = (\!(f(a)\,, f(b)-f(c))\!)\ \} \\
&= H_{f(a)}\ .
\end{aligned}$$

zu (ii):

Die gleiche Rechnung führt uns zu den Gleichungen $f(H_b) = H_{f(b)}$ und $f(H_c) = H_{f(c)}$.

zu (iii):

Nach Satz 6 in §6 gibt es jeweils genau einen Schnittpunkt der drei Höhen in den Dreiecken a, b, c und $f(a), f(b), f(c)$, der mit h bzw. h' bezeichnet sei. Wegen der Gleichungen aus (i) und (ii) kann nun nur noch gelten: $f(h) = h'$.

Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\boldsymbol{a, b, c}$ geht also unter einer Bewegung $\boldsymbol{f}$ über in den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\boldsymbol{f(a), f(b), f(c)}$.

....

(1) Siehe Definition 1 (b) in §5.

(2) alle Ausdrücke mit u heben sich auf !