Modul Geometrie
WiSe 2008/2009
Schmale

Klausur 20. Februar 2010
14.00 bis 16.00
W3-1-161
und W1-0-015

Name	Vorname

Ich habe das Merkblatt gelesen.	Unterschrift:

Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

1 (6 P)	2 (2 P)	3 (2 P)	4 (4 P)	5 (4 P)	6 (6 P)	Punkte Klausur	Punkte(1) Übung	Summe	**Note**

Außer bei Aufgabe (5) sind alle Antworten auf Fragen zu begründen, damit sie gewertet werden können. Deswegen sind Teilergebnisse und Ergebnisse mit Hilfe von Text so darzustellen, dass Ihr Gedankengang und/oder Ihr Rechenweg deutlich erkennbar sind/ist.

Maximal sind 24 Punkte in der Klausur erreichbar

Dies sind die Aufgaben, viel Erfolg !

(1) **(6P)** In $\mathbb{R}^2$ sei $\Gamma := \mathsf{Lös}\,(3x_1 - x_2, 2)$ und $p = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(i) Stellen Sie Γ in der Form „$\Gamma = a + U$“ dar und klären Sie, ob p in Γ liegt.

(ii) Beweisen/Begründen Sie die folgende Aussage mit Hilfe von Resultaten aus der Vorlesung und ohne das Ergebnis aus (iii) zu benutzen(!):
Es gibt genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die zwei verschiedene und damit alle Punkte der Geraden Γ festlässt und den Punkt p in den Punkt $q = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ abbildet.

(iii) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$, mit denen für die affine Abbildung f aus (ii) gilt: $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(2) **(2P)** Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und seien $a, b, b' \in K^n$ drei kollineare Punkte. Es gelte dabei $b \neq a \neq b'$. Zeigen Sie für $x \in K^n$ [(2)]:

$$\mathsf{TV}\,(a, b, x) = \mathsf{TV}\,(a, b, b') \cdot \mathsf{TV}\,(a, b', x)\ .$$

(3) **(2P)** Bestimmen Sie die orientierten Flächeninhalte der orthogonalen Projektionen des von den beiden linear unabhängigen Vektoren a, b in $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms auf die drei Koordinatenebenen

$$E_{12} = \langle e^{(1)}, e^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}\,, E_{23} := \langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}\,, E_{31} := \langle e^{(3)}, e^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}\ .$$

Dabei sei $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Zur Erinnerung: Der orientierte Rauminhalt des von den linear unabhängigen Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ in $\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops ist $\mathsf{det}\,[u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}]$.

....

[(1)] umgerechnet entsprechend dem Gewicht der Übungen in der Gesamtnote.

[(2)] In der Klausur wurde mitgeteilt, dass bei Aufgabe **(2)** der Punkt x auf der Geraden durch a, b und b' liegen soll und muss, damit das Teilverhältnis überhaupt definiert ist.

(4) **(4P)** Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei Q eine Teilmenge von K^n mit der folgenden Drei-Punkte-Eigenschaft (DPE):
„Wenn drei paarweise verschiedene kollineare Punkte in Q liegen, dann liegt die ganze Gerade durch diese drei Punkte in Q."

(i) Zeigen Sie: Ist Γ ein affiner Unterraum von K^n, und hat Q die DPE, dann hat auch $\Gamma \cap Q$ die DPE.

(ii) Sei $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $\varphi \in \mathbb{R}[x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ und $Z = \mathcal{V}^3(\varphi) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \varphi(v) = 0\}$. $\mathcal{V}^2(\varphi)$ ist analog erklärt.
Zeigen Sie: Die Nullstellenmenge Z in $\mathbb{R}^3$ hat die DPE.
Benutzen Sie dabei, falls bei Ihrer Lösung hilfreich, ohne Beweis, dass für Geraden Γ in $\mathbb{R}^2$ gilt: $\left|\Gamma \cap \mathcal{V}^2(\varphi)\right| \in \{0, 1, 2\}$.
Bezeichnungsvorschlag: Zu einem Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ sei $\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

(5) **(4P)** Beurteilen Sie folgende Aussagen in den Kästchen mit richtig oder falsch.

Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt. Jede falsche einen Minuspunkt. Keine Antwort ergibt jeweils 0 Punkte. Weniger als 0 Punkte sind nicht möglich.

(a) Seien M_1, M_2 zwei Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, mit der Eigenschaft:
„zu je zwei Punkten a, b liegt stets auch der Mittelpunkt der Strecke $[a, b]$ in der Menge"
Dann hat $M_1 \cap M_2$ in jedem Falle dieselbe Eigenschaft. ☐

(b) Sind C und C' zwei nicht leere konvexe Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, dann ist auch die Menge $C - C' = \{a - a' : \; a \in C, a' \in C'\}$ konvex. ☐

(c) Die affine Hülle von vier Geraden in $\mathbb{R}^3$, von denen keine drei kopunktal sind, von denen aber je zwei kopunktal sind, ist zweidimensional. ☐

(d) Es gibt eine von der identischen Abbildung verschiedene Bewegung in $\mathbb{R}^2$, die Hintereinanderausführung zweier affiner Abbildungen ist, die keine Bewegungen sind. ☐

(6) **(6P)** In $\mathbb{P}^2$ seien $p_i := \langle e^{(i)} \rangle, 1 \leq i \leq 3$ und $g_i := p_i \vee p_{i+1}, 1 \leq i \leq 2$. Mit $e^{(i)}$ ist der i-te Standardbasisvektor bezeichnet. Außerdem sei $z := \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$.

(i) Begründen Sie, warum für alle $p \in g_1$ die Abbildung $f : g_1 \to g_2$ mit $f(p) = (p \vee z) \cap g_2$ erklärt ist, das heißt hier: einen (projektiven) Punkt in g_2 liefert.

(ii) Berechnen Sie $f(\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle)$ mit der Abbildung f aus (i).

(iii) Sei $H = \overline{\{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}}^{\mathsf{aff}}$ in $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie einen Punkt $p \in g_1$ an derart, dass $p \cap H \neq \varnothing$ und $f(p) \cap H = \varnothing$ mit der Abbildung f aus (i).

◇ ◇
◇
◇ ◇