26.2.2010

Lösungshinweise zu den Aufgaben der Klausur vom 20. Februar 2010

(1) (i) (2P) Man erkennt vermutlich mit bloßem Auge, dass $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ aus $\mathsf{Lös}\,(3x_1 - x_2, 2)$ ist und dass $\mathsf{Lös}\,(3x_1 - x_2, 0) = \langle \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$. Mit $a = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ und $U = \langle \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ gilt somit

$$\Gamma = \mathsf{Lös}\,(3x_1 - x_2, 2) = a + U \ .$$

Der gegebene Punkt p ist nicht aus Γ denn es ist ja $3p_1 - p_2 = 7 \neq 2$.

(ii) (2P) Seien $a, a' \in \Gamma, a \neq a'$, z.B.: a wie in (i) und $a' = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$. Da p nicht aus Γ ist und a, a' zwei verschieden Punkte aus Γ sind, sind die drei Punkte a, a', p affin unabhängig. Oder: Da die Vektoren $a - p, a' - p$ linear unabhängig sind, sind die drei Punkte a, a', p affin unabhängig. Nach einem Ergebnis der Vorlesung gibt es dann zu drei beliebigen weiteren Punkten $\widetilde{a}, \widetilde{a'}, \widetilde{p}$ genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a) = \widetilde{a}, f(a') = \widetilde{a'}$ und $f(p) = \widetilde{p}$. Insbesondere trifft dies also zu, wenn $\widetilde{a} = a, \widetilde{a'} = a'$ und $\widetilde{p} = q$.

(iii) (2P) f ist (nach (ii)) als affine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Es gibt daher A, b wie in (iii) gesucht. Das ist zwar beruhigend, musste aber entsprechend der Aufgabenstellung nicht erwähnt werden. Für jedweden korrekten Ansatz, der eine Bestimmung von A zumindest oder von A und b ermöglichen kann, gab es je nach Reichweite 0,5 oder 1 Punkt. Für die tatsächliche Berechnung dann einen weiteren. Im Folgenden werden verschiedene Ansätze kurz besprochen:

- Ansatz: Wir wissen, dass

$$f(a) = a, f(a') = a', f(p) = q$$

oder z.B.

$$f(a) - f(a') = a - a', f(p) - f(a') = q - a', f(p) - f(a) = q - a \qquad (1)$$

gelten soll mit den gegebenen p, q und mit den beispielhaft von mir gewählten a, a' aus (ii). Man kann auch ohne Nachteile eine andere Wahl treffen.
Für A, b muss jedenfalls unabhängig von Ihrer Wahl von a und a' z.B. mit den ersten beiden Gleichungen in (1) gelten:

$$Aa - Aa' = A(a - a') = (a - a') \quad , \quad Ap - Aa' = A(p - a') = (q - a')$$

oder in Matrixform

$$A[a - a', p - a'] = [a - a', q - a'] \ , \text{ bzw. explizit } A \begin{bmatrix}-1 & 0\\-3 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix} \ . \qquad (2)$$

Berechnung: Mit (2) berechnet man nun

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}11 & -2\\18 & -1\end{bmatrix}$$

b kann nun auf verschiedene Weise auch noch bestimmt werden. Es ist ja $f(a) = a$, bzw. $Aa + b = a$ und daher

$$b = -Aa + a = -\frac{4}{5}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} .$$

Man kann aber auch anders vorgehen und mit zwei anderen Gleichungen aus (1) beginnen.

- Etwas weniger günstig ist es, mit den Gleichungen

$$Aa = a - b, Aa' = a' - b, Ap = q - b$$

zu beginnen. Man hat dann etwas mehr Mühe mit der Rechnung:

$$A[a, a'] = [a - b, a' - b] \text{ , bzw. explizit } A\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 - b_1 & 2 - b_1\\1 - b_2 & 4 - b_2\end{bmatrix} =$$

und mit $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ dann A als $\begin{bmatrix}1 - \frac{3}{2}b_1 & \frac{1}{2}b_1\\-\frac{3}{2}b_2 & 1 + \frac{1}{2}b_2\end{bmatrix}$.

Mit der dritten Beziehung $Ap = q - b$ erhält man dann direkt b.

- Man muss nicht unbedingt die Matrixschreibweise zur Anwendung bringen. Von einigen wurde A geschrieben als $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ und danach die ja in der Aufgabe angelegte Matrixschreibweise verlassen. Dann wird das ganze allerdings unübersichtlicher, da man dann dazu verleitet wird, an Stelle von (2) lauter Einzelgleichungen ungeordnet zu lösen.

Unabhängig von Ihrem Ansatz ergeben sich A und b notwendigerweise eindeutig. Ihre Existenz ist (s.o.) gesichert. Somit ist (iii) dann vollständig bearbeitet. Auch dies brauchte nicht ausgesprochen zu werden.

(2) Wenn drei kollineare Punkte a, b, c mit $a \neq b$ in der Relation $c = a + \lambda(b - a)$ stehen, dann heißt λ Teilverhältnis des angeordneten Tripels (a, b, c) und wird mit $\mathsf{TV}(a, b, c)$ bezeichnet. Dies brauchte nicht wiederholt zu werden.
Sei nun x ein weiterer Punkt auf der Geraden durch die nach Voraussetzung verschiedenen Punkte a und b und seien $\lambda = \mathsf{TV}(a, b, x), \lambda' = \mathsf{TV}(a, b', x), \mu = \mathsf{TV}(a, b, b')$. Dann gilt laut Definition von „TV“ :

$$x = a + \lambda(b - a), x = a + \lambda'(b' - a), b' = a + \mu(b - a) .$$

Einsetzen von b' in die mittlere Gleichung ergibt

$$x = a + \lambda'\big(a + \mu(b - a) - a\big) = a + \lambda'\mu(b - a).$$

Da aber auch $x = a + \lambda(b - a)$, folgt $\lambda'\mu(b - a) = \lambda(b - a)$. Da nach Voraussetzung $(b - a) \neq 0$, folgt schließlich $\lambda = \lambda'\mu$.

(3) Die Projektionen von a, b auf E_{12}, E_{23}, E_{31} sind jeweils

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\a_2\\a_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\b_2\\b_3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}a_1\\0\\a_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b_1\\0\\b_3\end{bmatrix}$$

Für die korrekt ermittelten Projektionen gab es bereits 1 Punkt.
Nun gibt es z.B. die folgenden beiden Möglichkeiten, die angegebene Formel zu benutzen.

•man geht über zu den gekürzten Vektoren, z.B. bezüglich E_{12} mit der Vorschrift $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}^2$; $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, die mit dem Skalarprodukt verträglich ist. Hier wurden aber keine formal ausgearbeitete Begründungen verlangt. Es genügte ein Hinweis in irgend einer verständlichen Form. Nach der angegebenen Formel für $n = 2$ sind dann

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

die drei gesuchten orientierten Flächeninhalte.

•man berechnet (im Falle der Projektion auf E_{12}) das orientierte Volumen des von $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{(3)}$ aufgespannten Polytops, das ja die Höhe 1 hat. Nach der angegebenen Formel ist dieses dann $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Die drei gesuchten orientierten Flächeninhalte ergeben sich also analog zum vorigen Unterpunkt.

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Es genügte durchgehend jeweils einen der drei Fälle ausführlich zu bearbeiten und dann auf Analogie zu verweisen.

(4) (i) (2P) Seien a, b, c drei paarweise verschiedene kollineare Punkte in $\Gamma \cap Q$. Da Q die DPE hat, liegt dann auch die Verbindungsgerade $a \vee b$ $(= a \vee c = a \vee b \vee c)$ ganz in Q. Der affine Unterraum Γ enthält bereits mit je zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade. Die Gerade durch a, b, c liegt also nicht nur in Q sondern auch in Γ und somit in $\Gamma \cap Q$.
Die DPE für $\Gamma \cap Q$ ist damit nachgewiesen.

(ii) (2P) Seien a, b, c drei paarweise verschiedene kollineare Punkte in Z. dann gilt $1 = a_1^2+a_2^2 = b_1^2+b_2^2 = c_1^2+c_2^2$. Also liegen die Punkte $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ alle in $\mathcal{V}^2(x_1^2+x_2^2-1)$. Da auch $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ kollinear sind (!), müssen (siehe Hinweis in der Aufgabe) mindestens zwei von ihnen gleich sein, etwa $\overline{a} = \overline{b}$. Da $a \neq b$, gibt es eine eindeutige Verbindungsgerade $a \vee b$, für die nun gilt:

$$a \vee b = \{\alpha a + \beta b : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\} = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \lambda \end{bmatrix} : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Man sieht jetzt, dass die ganze Gerade $a \vee b$ in der Menge Z enthalten ist.

(5) Die richtige Antwort ist bei (a) bis (d): $\boxed{\text{richtig}}$.

(6) (i) (2P) Da $p \in g_1$ und $z \notin g_1$, sind p, z verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^2$ und $p \vee z$ ist die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade. Da z auch nicht auf g_2 liegt, sind $p \vee z$ und g_2 zwei verschiedene projektive Geraden in $\mathbb{P}^2$ und haben daher einen eindeutigen (projektiven) Schnittpunkt. Für $p \in g_1$ ist daher $f(p)$ stets als (projektiver) Punkt in g_2 erklärt.

(ii) (2P) Sei $p = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sei außerdem zur Abkürzung $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, also $z = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$. Um $f(p)$ zu berechnen ist $\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$ zu bestimmen, denn $U(p \vee z) = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U(g_2) = \langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Da $w \notin \langle e^{(2)}, e^{(3)} \rangle_{\mathbb{R}}$ und da $U(p \vee z)$ und $U(g_2)$ beide zweidimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind, ist ihr Schnittraum eindimensional.

Da $w - v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in U(p \vee z) \cap U(g_2)$, folgt $U(p \vee z) \cap U(g_2) = \langle u - w \rangle_{\mathbb{R}}$ und somit $f(p) = \langle v - w \rangle_{\mathbb{R}}$.

(iii) (2P) Dieser Aufgabenteil ist nicht leicht zu lösen.

Am besten ist es, wenn man sich die gegebene projektive Abbildung in ihrer Wirkung im $\mathbb{R}^3$ vorstellt. Man kann allerdings auch systematisch vorgehen und zunächst einen Punkt q in g_2 suchen derart, dass $q \cap H = \varnothing$. Diesen (eindeutigen) Punkt q findet man, indem man die zu H parallele Ebene durch 0 mit $U(g_2)$ schneidet. Dann kann man sozusagen rückwärts mit Hilfe der Geraden $q \vee z$ den Urbildpunkt p finden mit dem gilt $f(p) = q$. Es ist $p = (q \vee z) \cap g_1$.

Da $U(g_1), U(g_2)$ von extrem einfacher Gestalt sind kann man aber (vielleicht) auch direkt „sehen“ dass $q = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ der gesuchte Punkt ist und damit p ermitteln als $p = \langle v \rangle$ mit $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Mit diesen Punkten p, q gilt jedenfalls $p \in g_1$, $q \in g_2$ und $f(p) = q$. Soviel zum schwierigen Teil der Teilaufgabe (iii).

Wie auch immer man p gefunden hat oder vermutet hat, ist nun nachzuweisen, dass, wie in der Aufgabe gefordert, $p \cap H \neq \varnothing$ und $f(p) \cap H = \varnothing$, bzw. $q \cap H = \varnothing$.

Letzteres gilt aber bereits nach Wahl von q und man ermittelt $p \cap H = \{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \}$.