ein paar

24.1.2010.

Aufgabe 3:

Seien $P = \mathbb{Z}^2$, $G = \{a + \mathbb{Z}u : a, u \in \mathbb{Z}^2, u \neq 0\}$ und I die Relation auf $P \times G$: für alle $a \in P$ und für alle $g \in G$: $aIg \Leftrightarrow a \in g$

Es ist die Gültigkeit der Axiome A_1-A_4 zu überprüfen.

A_1: Behauptung: A_1 gilt nicht für $\mathbb{Z}^2$.

Beweis mit Gegenbsp.:

Ich zeige, es existiert $a, b \in \mathbb{Z}^2$, $g, h \in G$: $a, b\, I g$ und $a, b\, I h$ sowie $g \neq h$.

Seien $a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$.

Dann existieren $g, h \in G$ mit

$$g := \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ und } h := \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Damit zeige ich nun $a, b\, Ig$ und $a, b\, Ih$.

(a) Es ex. $p_1 \in \mathbb{Z}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wähle $p_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit aIg.

Außerdem ex. $p_2 \in \mathbb{Z}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wähle $p_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit bIg.

b) Weiterhin ex. $p_3 \in \mathbb{Z}: \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + p_3\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

Wähle $p_3 = 0: \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ und somit $a\, I\, h$

Des Weiteren ex. $p_4 \in \mathbb{Z}: \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + p_4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Wähle $p_4 = 2: \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und somit $b\, I\, h$

(c) Weiterhin ist zu zeigen: $g \neq h$

Es ist $p := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in g$, $p \in \mathbb{Z}^2$

Man nehme nun an $p\, I\, h$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 + 0\lambda\\0 + 2\lambda\end{pmatrix}$. Es folgt $\begin{matrix}0 = 0\\1 = 2\lambda\end{matrix}$

und $\lambda = 1/2$. Dies stellt jedoch einen Widerspruch für ganze Zahlen dar.

$\Rightarrow p\, I\, g \wedge p\, \not{I}\, h$

$\Rightarrow g \neq h$

Mit (a), (b), (c) folgt die Behauptung.

A_2: Behauptung: A_2 gilt für $\mathbb{Z}^2$

Beweis: Annahme:

A_2 gilt nicht für $\mathbb{Z}^2$, d.h.

$\forall g \in G,\ a,b,c \in P:\ a,b,c\ I\ g$

direkter Nachweis wäre hier günstiger, als = U.W.

Betrachte nun aber folgendes Gegenbeispiel:

a, b, c sind drei verschiedene Punkte aus $\mathbb{Z}^2$

$a := \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}^2$ mit $q \neq 0$ und $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$: a, b, c wie folgt dargestellt werden können:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = p + x_1 q$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = p + x_2 q$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p + x_3 q$$

Außerdem seien $p := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $q := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ mit $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Dann folgt für a, b, c:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3 = p_1 + x_1 \cdot q_1 \\ \text{II} & 3 = p_2 + x_1 \cdot q_2 \\ \text{III} & 2 = p_1 + x_2 \cdot q_1 \\ \text{IV} & 1 = p_2 + x_2 \cdot q_2 \\ \text{V} & 0 = p_1 + x_3 \cdot q_1 \\ \text{VI} & 1 = p_2 + x_3 \cdot q_2 \end{array}$$

Setzt man IV und VI gleich, erhält man:

$$p_2 + x_2 \cdot q_2 = p_2 + x_3 \cdot q_2 \qquad (*)$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $q_2 = 0$

Damit ergibt sich in II $p_2 = 3$ und in IV $p_2 = 1$. Dies ist ein Widerspruch für ganze Zahlen.

2. Fall: $q_2 \neq 0$

Mit $(*)$ folgt $p_2 + x_2 \cdot q_2 = p_2 + x_3 \cdot q_2$

Kürzungs-
regeln,
$-p_2$

Jetzt setze man dies in V ein:

$$0 = p_1 + x_2 \cdot q_1$$

und in III ebenso:

$$2 = p_1 + x_2 \cdot q_1$$

$\Rightarrow 0 = 2$ Dies ist ein Widerspruch in den ganzen Zahlen.

$\Rightarrow$ Annahme war falsch.

$\Rightarrow$ Behauptung.

A_3: Behauptung: A_3 gilt nicht für $\mathbb{Z}^2$

Beweis: Annahme:

A_3 gilt für $\mathbb{Z}^2$, d.h. $\forall g \in G,\ a \in P$:

$a \not I g \quad \exists!\, g' \in G : g' \parallel g \wedge a I g'$

Betrachte nun aber folgendes Gegenbeispiel:

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad g' := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

was zwischen Mengenklammern steht ist bereits eine Menge.

$$g'' := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad a := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

(1) $a \not I g$, da kein $\lambda \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $a I g' \wedge a I g''$, da g' und g'' so konstruiert sind, dass a Stützvektor von

ihnen ist.

(3) $g \parallel g'$, da einerseits beide Geraden denselben Richtungsvektor haben und andererseits g' mit a einen Stützvektor hat, der nach (1) nicht auf g liegt, d.h. $g \neq g'$. ✓

(4) $g \neq g''$, da die Geraden unterschiedliche Richtungsvektoren haben.

Weiterhin gilt:

Behauptung*: $g \cap g'' = \emptyset$ und somit $g \parallel g''$

Beweis: Annahme*:

$g \cap g'' \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, p \in g : p \in g''$

$\Rightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}:$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überführung in ein LGS:

I $\quad 2 + 2\lambda = 2 - \mu$

II $\quad 3 + \lambda = 2 + \mu$

aus I folgt: $\lambda = -\frac{1}{2}\mu$

aus II folgt: $\lambda = \mu - 1$ mit $\mu = \frac{2}{3}$

Dies stellt einen Widerspruch für ganze Zahlen dar.

$\Rightarrow$ Annahme* war falsch

$\Rightarrow$ Behauptung*

Zusammenfassend gilt also:

$a \not I\, g \wedge a\, I\, g' \wedge a\, I\, g''$

$\wedge\ g \parallel g' \wedge g \parallel g''$

$\Rightarrow$ Es gibt mehr als eine zu g parallele Gerade durch a.

Dies stellt jedoch einen Widerspruch zu A_3 dar und der dort geforderten Eindeutigkeit

$\Rightarrow$ Annahme war falsch.

$\Rightarrow$ Behauptung.

✓

A_4: <u>Behauptung</u>: A_4 gilt nicht für $\mathbb{Z}^2$

<u>Beweis</u>: <u>Annahme</u>:

A_4 gilt, wenn

$$\left[\begin{array}{lll} z, a, a' \in P & \text{kollinear mit} & z \neq a \neq a' \neq z \\ \wedge\ z, b, b' \in P & \text{"} \quad \text{"} & z \neq b \neq b' \neq z \\ \wedge\ z, c, c' \in P & \text{"} \quad \text{"} & z \neq c \neq c' \neq z \\ \wedge\ z \vee a \neq z \vee b \neq z \vee c \neq z \vee a & & \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a \vee b \parallel a' \vee b' \wedge b \vee c \parallel b' \vee c') \\ \Rightarrow (a \vee c \parallel a' \vee c') \end{array}\right]$$

wenn $\vee, \wedge$ geometrische Bedeutung haben besser nicht $\wedge, \vee$ in ihrer Bedeutung aus der Aussagenlogik gleichzeitig benutzen.

Betrachte nun aber folgendes Gegenbeispiel:

(Anmerkung:

Insbesondere wird genutzt, dass Verbindungsgeraden in $\mathbb{Z}^2$ nicht eindeutig sind, m. a. W. dass A_1 in $\mathbb{Z}^2$ nicht gilt.)

genau, aber dann dürfen Sie auch nicht „$a \vee b$" schreiben, denn woher soll der Leser dann wissen was gemeint ist?? (siehe vorige Korrektur!!)

$$z := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \wedge a := \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \wedge a' := \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$\wedge\ b := \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \wedge b' := \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} \wedge c := \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \wedge c' := \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\wedge\ a \vee b := \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \wedge a' \vee b' := \left\{\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right\}$$

$\wedge\ b \vee c := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\wedge\ b' \vee c' := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$\wedge\ a \vee c := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\wedge\ a' \vee c' := \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann sind $z, a, a', b, b', c, c' \in P$ und paarweise verschieden. Weiterhin sind z, a, a' kollinear, da sie gemeinsam auf der Geraden $g := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in G$ liegen sowie z, b, b' kollinear, da sie gemeinsam auf der Geraden $g' := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \in G$ liegen und z, c, c' kollinear, da sie gemeinsam auf der Geraden $g'' := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ liegen, m. a. W. alle notwendigen Voraussetzungen sind erfüllt.

Des Weiteren sind alle Verbindungsgeraden „wohldefiniert", d.h.

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in a \vee b$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in a \vee b$$

$$a' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \in a' \vee b'$$

$$b' = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \in a' \vee b'$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in b \vee c$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in b \vee c$$

$b' = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in b' \vee c'$

$c' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in b' \vee c'$

$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in a \vee c$

$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in a \vee c$

$a' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in a' \vee c'$

$c' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in a' \vee c'$,

d.h. alle definierten Verbindungsgeraden enthalten ihre zu verbindenden Punkte.
Es gilt nun weiter:

(1) $a \vee b \cap a' \vee b' = \emptyset$, da $a \vee b$ die Menge aller Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ ist, deren x-Komponente gleich 3 ist und $a' \vee b'$ offensichtlich nur Punkte enthält, die eine gerade x-Komponente besitzen
$\Rightarrow a \vee b \parallel a' \vee b'$

(2) $b \vee c \cap b' \vee c' = \emptyset$, da $b \vee c$ die Menge aller Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ ist, deren y-Komponente gleich 3 ist und $b' \vee c'$ offensichtlich nur Punkte enthält, die eine gerade y-Komponente (genauer: $2 + z \cdot 4$, $z \in \mathbb{Z}$) besitzen.
$\Rightarrow b \vee c \parallel b' \vee c'$

Aus (1) und (2) folgt mit der Annahme,

dass A_4 gilt: $a \vee c \parallel a' \vee c'$

Es gibt aber $p := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in a \vee c$

und $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in a' \vee c'$

d.h. $p \in \mathbb{Z}^2 : p \, I \, a \vee c \wedge p \, I \, a' \vee c'$

$\Rightarrow a \vee c \cap a' \vee c' \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \vee c \nparallel a' \vee c'$

Dies stellt jedoch einen Widerspruch dar.

$\Rightarrow$ Annahme war falsch.

$\Rightarrow$ Behauptung.

Bem. zu "A_4":

Die einfachste Möglichkeit mit A_4 umzugehen wäre zu sagen: A_4 setzt in seiner Formulierung eindeutige Verbindungsgeraden voraus. Da dies aber nicht gegeben ist, macht A_4 in dieser Form keinen Sinn. Sie haben in Ihrer letzten Version ein Beispiel angegeben wo bei geeigneter Wahl von verbindenden Geraden A_4 zutrifft und in Ihrer gezeigten einer wo A_4 nicht zutrifft. Mehr kann man dazu nun nicht mehr sagen (m.E.)