Beobachtung 3 in §7: Transformationsformel für Polynome vom Totalgrad ≤ 2

Gegeben seien $A \in K^{n\times n}, b \in K^n, c \in K$ und damit

$$\varphi = {}^{\mathsf{t}}xAx + {}^{\mathsf{t}}xb + c \in K[x] \ .$$

Seien weiter $P \in K^{n\times n}$, P invertierbar, $v \in K^n$ und $f: \ K^n \to K^n, x' \mapsto Px' + v$ die damit gegebene Affinität, dann erhält man die folgende Transformationsformel

$$\varphi(f(x')) = \varphi(Px' + v) = {}^{\mathsf{t}}x'A'x' + {}^{\mathsf{t}}x'b' + c' =: \varphi'(x')$$

mit

$$\boldsymbol{A' = {}^{\mathsf{t}}PAP, \quad b' = {}^{\mathsf{t}}P\big((A + {}^{\mathsf{t}}A)v + b\big), \quad c' = {}^{\mathsf{t}}v(Av + b) + c \ .}$$

Diese Transformationsformel ist Ansatzpunkt für die Klassifizierung der Nullstellenmengen $\mathcal{V}_K^n(\varphi)$ (quadratische Flächen, Quadriken).

Den **Beweis** liefert die folgende kurze Rechnung:

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(Px' + v) & = & {}^{\mathsf{t}}\big(Px' + v\big)A\big(Px' + v\big) + {}^{\mathsf{t}}\big(Px' + v\big)b + c \\
& = & \big({}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}P + {}^{\mathsf{t}}v\big)A\big(Px' + v\big) + \big({}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}P + {}^{\mathsf{t}}v\big)b + c \\
& = & {}^{\mathsf{t}}x'\,\big({}^{\mathsf{t}}PAP\big)x' + {}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}PAv + {}^{\mathsf{t}}vAPx' + {}^{\mathsf{t}}vAv + {}^{\mathsf{t}}x'{}^{\mathsf{t}}Pb + {}^{\mathsf{t}}vb + c \\
& = & {}^{\mathsf{t}}x'\,A'x' + \big({}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}PAv + {}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}P\,{}^{\mathsf{t}}A\,v + {}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}Pb\big) + \big({}^{\mathsf{t}}vAv + {}^{\mathsf{t}}vb + c\big) \\
& = & {}^{\mathsf{t}}x'\,A'x' + {}^{\mathsf{t}}x'\,{}^{\mathsf{t}}P\,\big(Av + {}^{\mathsf{t}}A\,v + b\big) + \big({}^{\mathsf{t}}v(Av + b) + c\big) \\
& = & {}^{\mathsf{t}}x'\,A'x' + {}^{\mathsf{t}}x'b' + c' \\
& = & \varphi'(x')
\end{array}$$

□