Schriftliche Ausarbeitung zur Vorlesung vom 14.12.2009 – Teil I

Abgabe von: Bianca Dettke (Email: Bianca.Dettke@gmx.de)

Die folgende Niederschrift der Vorlesung vom 14.12.09 gliedert sich in das Kapitel 2: „Analytische Geometrie in euklidischen Vektorräumen" ein. Nachdem in der vorherigen Vorlesung einige Grundbegriffe wie zum Beispiel das Skalarprodukt und der Abstand aus der Linearen Algebra wiederholt wurden, beginnt die Vorlesung nun mit dem Spezialfall der „Hyperebene" für Beobachtung 1.

Spezialfall „Hyperebene":

Sei Γ wie in Beobachtung 1 ein affiner Unterraum mit $\Gamma = a + U$, wobei a den Stützvektor darstellt und U die Richtung angibt. Sei weiter $\dim U = n-1$, dann ist $\dim U^\perp = 1$. Damit können wir den Vektorraum $U^\perp$ mit Hilfe eines einzigen von σ verschiedenen Vektoren aufspannen, etwa $U^\perp = \langle c \rangle_{\mathbb{R}}$, $c \neq \sigma$, wobei c zwangsläufig ungleich σ, wenn die Dimension 1 ist. Weiterhin ist c nur bis auf einen von σ verschiedenen Faktor eindeutig. Deswegen kann c so gewählt werden, dass das Skalarprodukt $((a,c)) \geq \sigma$ und $\|c\| = 1$ ist. Dann heißt die folgende Darstellung der Hyperebene (Geraden für $n=2$) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : ((x,c)) = \alpha\}$ mit $\alpha = ((a,c))$ Hessesche Normalform für Γ, die genau dann eindeutig ist, wenn $\alpha > 0$. α ist dabei der Abstand zwischen Γ und dem Nullpunkt.

Beispiel 2 – „Halbräume in Hesseform":

Sei $Y = a + U$ wie zuvor die Hyperebene und $U^{\perp} = \langle c \rangle_{\mathbb{R}}$ mit $c \neq 0$. Da $U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$ hat jeder Vektor x eine Darstellung $x - a = \lambda c + u$ und es ist $((x,c)) = ((a,c)) + \lambda \|c\|^2$, denn für $u \in U$ ist $((c,u)) = 0$. Wird c nun so gewählt, dass $\underbrace{((a,c))}_{=:\alpha} \geq 0$, dann erhält man den Halbraum

$H_{Y,c}$ als $H_{Y,c} = \{x \in \mathbb{R}^n : ((x,c)) \geq ((a,c))\}$.

Betrachten wir das Beispiel nun ein bisschen anders: Jeder Vektor c ungleich 0 aus dem $\mathbb{R}^n$ ergibt auf folgende Weise eine lineare Abbildung, und zwar: $\ell_c : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ((x,c))$, eine so genannte Linearform. Damit gilt weiter für den Halbraum: $H_{Y,c} = \ell_c^{-1}([\alpha, \infty))$.

Beispiel / Beobachtung 3 – „Orthogonale Projektion"

Wir nehmen zwei Untervektorräume U und W aus dem $\mathbb{R}^n$, die sich orthogonal so ergänzen sollen, dass sie den ganzen Raum ausfüllen, also $U \perp W = \mathbb{R}^n$. Weiter haben wir die bereits bekannte lineare Projektion $\ell_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf U entlang W mit $u + w \to u$. Der Anteil in Richtung w wird sozusagen „vergessen". Das weitere Verfahren verläuft dann analog zu affinen Abbildungen, so dass sich mit dem Hinzufügen einer geeigneten Translation eine orthogonale Projektion auf affine Unterräume ergibt (vgl. dazu §2 Beispiele 3).

Eine Formel zur Berechnung der orthogonalen Projektion ist $\ell_U(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{((x, u^{(i)}))}{((u^{(i)}, u^{(i)}))}$ für ein beliebiges x aus $\mathbb{R}^n$ und einer orthogonalen Basis $u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$ von U.

Dabei gelten die folgenden wichtigen Regeln:

(a) Das Ergebnis der Projektion steht senkrecht auf der Differenz zwischen Ausgangspunkt und dem projizierten Punkt, kurz: $x - \ell_U(x) \perp U$.

(b) Die Projektion hat den kleinsten Abstand von dem Punkt x, kurz: $\|x - \ell_U(x)\| \leq \|x - u\|$ für alle $u \in U$.

Beispiel 4 – „Abstände von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$"

Wir nehmen zwei nicht leere Teilmengen M, M' aus dem $\mathbb{R}^n$. Der Abstand zwischen den Teilmengen wird dann definiert durch das Infimum aller Abstände zwischen x und x', wobei $x \in M$ und $x' \in M'$. kurz: $d(M, M') := \inf\{\|x - x'\| : x \in M, x' \in M'\}$. Insbesondere ist $d(M, M')$ dann auch gleich $d(M', M)$, da das Minuszeichen unerheblich ist.

Nun betrachten wir einige Sonderfälle:

(a) Der Abstand zwischen M und M' ist gleich 0, wenn der Durchschnitt nicht leer ist. Es gibt also mindestens einen Punkt, der sowohl in M als auch in M' enthalten ist und infolgedessen den Abstand 0 hat. Formal ausgedrückt bedeutet das: $d(M, M') = 0 \Leftrightarrow \overline{M} \cap \overline{M'} \neq \emptyset$. immer noch ungenau/unvollst. $\overline{M} = ?$

(b) Der Abstand zwischen zwei einelementigen Mengen $M = \{a\}$ und $M' = \{a'\}$ ist genau gleich mit dem Abstand der beiden Punkte, also: $d(M, M') = d(a, a') = \|a - a'\|$.

(c) Sei $M = \{a\}$ und $M' = U$ mit einem Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$. Dann berechnet sich der Abstand zwischen dem Punkt a und dem Untervektorraum U mit der Projektion auf folgende Weise: $d(a, U) = \| a - \ell_U(a) \|$. Das heißt, dass der Punkt a abzüglich der Projektion den kleinstmöglichen Abstand hat.

(d) Seien $M = a + U$ und $M' = a' + U'$ zwei affine Unterräume mit U, U' Untervektorräumen, dann lautet die Behauptung: $d(M, M') = d(a - a', U + U')$ mit $U + U'$ Untervektorraum.
Mit (c) kann ~~diese~~ rechte Seite der Gleichung (anschließend) in $\| (a - a') - \ell_{U+U'}(a - a') \|$ überführt werden.

Beweis von (d):

Wir beginnen mit der Definition des Abstands. Danach ist $d(M, M') = \inf\{ \|(a+u) - (a' + u')\| : u \in U, u' \in U' \}$. Diesen Ausdruck können wir umformulieren, sodass sich ergibt: $d(M, M') = \inf \{ \| (a - a') + (u - u') \| : u \in U, u' \in U' \}$ mit $(u - u') \in U + U'$. Da nun u und u' völlig frei laufen und alle Möglichkeiten von U und U' durchlaufen werden, können auch alle Vektoren in $U + U'$ erreicht werden. Das Minuszeichen ist dabei ohne Relevanz, da es sich um Untervektorräume handelt. Insgesamt erhalten wir also das gleiche, wenn wir von vornherein nur einen Vektor laufen lassen. Formal ausgedrückt heißt das, dass der Abstand $d(M, M') = \inf\{ \| (a - a') - v \| : v \in U + U' \}$ ist, was wiederum nach Definition auf $d((a - a'), U + U')$ zurückgeführt werden kann.

$\square$

Beispiel 5 – „Geometrische Objekte 2. Grades"

Durch die Einführung des Skalarproduktes treten automatisch geometrische Objekte höheren Grades, in Form von quadratischen Flächen, auf. Zunächst handelt es sich dabei um Kreise und Ellipsen.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $^t x\, x = ((x,x)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Die r-Sphäre $S_{q,r} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2 = r^2 \}$ um den Punkt $q \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2 = \| x - q \|^2$ und $r > 0$ ist ein Beispiel einer quadratischen Fläche.

Bei der Anwendung von affinen Abbildungen ergeben sich, vorausgesetzt die Abbildung ist nicht zu trivial, neue (quadratische) Gebilde. Das heißt, wenn wir eine Abbildung anwenden und x einer bestimmten Bedingung, also der Gleichung genügt, dann kann die Abbildung vollzogen werden und es ergibt sich ein neues Gebilde. Zum Beispiel: $^t(Ax) \cdot (Ax) = {}^t x\, {}^t A A x$

und etwa: $A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$, $a_i > 0$. Es entsteht ein

Ellipsoid aus der r-Sphäre.