Ausarbeitung zur Vorlesung

„Geometrie“

14.12.2009

- zweiter Teil –

Vorgelegt von:

Alexander Eik Master of Education

Thematische Einordnung in den Semesterverlauf

Die heutige Vorlesung zeigt einige weitere geometrische Zusammenhänge in euklidischen Vektorräumen (Kapitel 2, §4). Nach einer Wiederholung der wichtigsten Begriffe, die in der Linearen Algebra bereits Verwendung gefunden haben – z.B. euklidischer Vektorraum, Standardskalarprodukt, Länge, Abstand, senkrecht, orthogonale Basis – wird die Normalenform von affinen Untervektorräumen sowie der Spezialfall dieser Notationsweise, die Hesse'sche Normalform, eingeführt (Beobachtung 1). Beispiel 2 veranschaulicht die Verwendung dieser Notation für Halbräume. In Beispiel/ Beobachtung 3 und Beispiel 4 finden die Begriffe „orthogonale Projektion" und „Abstände von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$" eine Anwendung. In Beispiel 5 wird schließlich noch der Begriff der „Sphäre", also der Kreislinie im Zusammenhang mit geometrischen Objekten zweiten Grades, eingeführt.

Der auszuarbeitende Abschnitt beginnt mit dem Übungsbeispiel 6, in dem eine exemplarische und detaillierte Rechenarbeit mit dem Skalarprodukt vorgeführt werden soll.

Übungsbeispiel 6:

Wir befinden uns im $\mathbb{R}^2$. Sei $S_{q,r} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - q\| = r \; mit \; r > 0\}$ die Kreislinie um den Punkt q mit dem Radius r. Um in den folgenden Ausführungen umständliche Rechnungen zu umgehen, greifen wir einen Spezialfall heraus und betrachten die Situation $q = 0$. Somit ist unsere Sphäre nun gegeben mit $S_{0,r} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = r \; mit \; r > 0\}$.

Die Ausgangssituation für diese Aufgabe besteht darin, dass ein Punkt a auf der Kreislinie liegt, durch den eine Gerade, etwa $\Gamma = a + < v >_{\mathbb{R}}$ mit $a \in S_{0,r}$ und $v \neq 0$, verläuft. Wie drückt sich nun in diesem Fall der (eventuell) zweite Schnittpunkt mit $S_{q,r}$ mit der Geraden Γ aus? Zur Beantwortung dieser Frage liefert das Skalarprodukt eine konkrete Angabe.

Hierfür sei $b \in \Gamma$ mit $b = a + \lambda v$. Den Fall $\lambda = 0$ betrachten wir hier nicht weiter, denn dann wäre $a = b$ und es läge kein zweiter Schnittpunkt vor. Damit dieser Punkt b nun auf der Kreislinie liegt, muss die Länge des Vektors b gleich dem Radius sein. Wann ist nun also $\|b\| = r$?

Für die folgenden Rechnungen sind Rechnungen mit quadrierten Termen von hohem Nutzen, um Gleichungen mit klaren Aussagen anstatt Ungleichungen zu erhalten.

Wenn also $\|b\| = r$ sein soll, dann gilt auch:

$$r^2 = \|b\|^2 = \|a\|^2 + 2\lambda\big((a, v)\big) + \lambda^2\|v\|^2$$

Der Punkt a liegt nun also auf der Kreisfläche, also muss nach Voraussetzung auch gelten: $\|a\| = r$, sowie $\|a\|^2 = r^2$:

$$r^2 = r^2 + 2\lambda\big((a, v)\big) + \lambda^2\|v\|^2$$

$$\overset{-r^2}{\Longleftrightarrow} \qquad 0 = 2\lambda\big((a,v)\big) + \lambda^2\|v\|^2$$

$$\xLeftrightarrow{\lambda\ ausklammern} \qquad 0 = \lambda\Big(2\big((a,v)\big) + \lambda\|v\|^2\Big)$$

Nun ergeben sich zwei Fälle. Wenn $\lambda = 0$ ist, dann ergibt sich durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung $r^2 = \|b\|^2 = \|a\|^2$ und somit $a = b$.

Im zweiten Fall mit $\lambda \neq 0$ muss also gelten:

$$0 = 2\big((a,v)\big) + \lambda\|v\|^2$$

$$\xLeftrightarrow{-2((a,v))} \qquad -2\big((a,v)\big) = \lambda\|v\|^2$$

$$\xLeftrightarrow{:\|v\|^2} \qquad -\frac{2\big((a,v)\big)}{\|v\|^2} = \lambda$$

Wir können nun eine weitere Umformung durchführen und ohne Einschränkung annehmen, dass $\|v\| = 1$, denn dadurch verändert sich die Gerade, also der affine Unterraum Γ nicht. Die Länge von v hat keinen Einfluss auf die Richtung der Geraden, denn es gilt auch $< v >_{\mathbb{R}} = < \frac{v}{\|v\|} >_{\mathbb{R}}$. Dabei stellt $\frac{1}{\|v\|}$ eine reelle Zahl dar, die auf die Länge von v, aber nicht die Richtung Einfluss nimmt.

Es gilt also $\lambda = -\frac{2((a,v))}{\|v\|^2}$ und mit $\|v\| = 1$ folgt daraus $\lambda = -2\big((a,v)\big)$.

Setzt man dies nun für λ in die Gleichung $b = a + \lambda v$ ein, erhält man eine genaue Aussage zur Lage des Punktes b bezüglich a.

§5 – Abbildungen der euklidischen Geometrie

In diesem neuen Abschnitt wird es zunächst um die Nutzung von bestimmten Eigenschaften von Abbildungen in der euklidischen Geometrie gehen. Die Herangehensweise wird ähnlich wie in vorangegangenen Abschnitten aussehen. Allerdings liegen hier kompliziertere Strukturen vor, die nicht nur in einem Vektorraum platziert, sondern zusätzlich mit dem Skalarprodukt in Verbindung gebracht werden. In diesem Kapitel werden affine Abbildungen der euklidischen Geometrie unter der Fragestellung betrachtet, welche von ihnen mit dem Skalarprodukt, der Länge, Winkeln etc. verträglich sind.

Für die Betrachtung solcher Abbildungen benötigen wir einige elementare Begriffe. Diese gibt uns Definition 1 vor.

Definition 1:

Sei f eine Abbildung mit $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

a) Die Abbildung f heißt starr (engl. rigid) oder abstandstreu oder Isometrie oder Bewegung, wenn der Abstand zweier Urbilder gleich dem Abstand der zugehörigen Bilder ist, formal bedeutet das:
$$\forall\, v, v' \in \mathbb{R}^m: \|f(v) - f(v')\| = \|v - v'\|$$

b) Die Abbildung f heißt metrisch (oder auch: mit dem Skalarprodukt verträglich), wenn das Skalarprodukt zweier Urbilder gleich dem der zugehörigen Bilder ist, also:
$$\forall\, v, v' \in \mathbb{R}^m: \Big(\big(f(v), f(v')\big)\Big) = ((v, v'))$$

c) Die Abbildung f heißt winkeltreu, wenn der Cosinus des eingeschlossenen Winkels zweier Urbilder gleich dem Cosinus des Winkels der zugehörigen Bilder ist, das bedeutet:
$$\forall\, v, v' \in \mathbb{R}^m: \Big(\big(f(v), f(v')\big)\Big) \cdot \|v\| \cdot \|v'\| = \big((v, v')\big) \cdot \|f(v)\| \cdot \|f(v')\|$$

d) Die Abbildung f heißt Ähnlichkeit, wenn sich der Abstand von je zwei Bildern zum Abstand der dazugehörigen zwei Urbilder nur durch einen identischen Faktor unterscheidet, also:
$$\exists \varrho > 0\ \forall\, v, v' \in \mathbb{R}^m: \|f(v) - f(v')\| = \varrho \|v - v'\|$$

Anmerkungen zu Definition 1:

Die Bedingung „metrisch“ ist für eine Abbildung die stärkste der hier genannten. Später wird in Satz 2 gezeigt, dass eine metrische Abbildung bereits starr, winkeltreu und Ähnlichkeit ist.

Eine metrische Abbildung ist zwangsläufig schon linear. Auch dies soll in Satz 2 gezeigt werden.

Die formale Notation in der Definition zu „winkeltreu“ wird hier, abweichend von der üblichen Cosinus-Definition, in der Produktschreibweise gewählt, um sie für alle $v, v' \in \mathbb{R}^m$ definieren zu können. Die Fälle $v = 0$ oder $v' = 0$ können hier also auch auftreten, womit die Gleichung immer noch definiert ist.

Bei der Definition zu „Ähnlichkeit“ fällt auf, dass der Sonderfall $\varrho = 1$ der Definition von starr entspricht. Der Faktor ϱ ist wie eine Art Streckfaktor zu erklären.

Diese Begriffe finden in folgendem Satz eine Verwendung:

Satz 2:

Sei f eine Abbildung mit $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

a) Ist die Abbildung f metrisch, so ist sie ebenso starr, winkeltreu und auch Ähnlichkeit mit $\varrho = 1$.

b) Ist die Abbildung f starr, so ist sie injektiv und Ähnlichkeit mit $\varrho = 1$.

c) Ist die Abbildung f starr, dann ist die Abbildung $l_p: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $u \longmapsto f(p + u) - f(p) = f(p) + f(p + u)$ für ein festes $p \in \mathbb{R}^m$ metrisch.

d) Ist die Abbildung f metrisch, so ist sie auch linear.

e) Ist die Abbildung f starr, dann existiert eine Darstellung als $f = T_{f(p)} \circ l_p$ für ein festes $p \in \mathbb{R}^m$ und der in c) definierten Abbildung l_p (Verschiebung um das Bild eines festen Punktes p).

Anmerkung zu Satz 2:
Starre Abbildungen können im Allgemeinen nicht linear sein. Eine Verschiebung (Translation) ist natürlich abstandstreu, aber nicht linear, wenn eine „echte“ Verschiebung vorliegt, also nicht um den Nullvektor.

Beweis von (d):
Wir konstruieren hierfür einen Vektorraum, in dem die Ausdrücke liegen, die wir gerne „verschwinden sehen“ würden.

Sei $\mathcal{U} = \langle f(v) : v \in \mathbb{R}^m \rangle_{\mathbb{R}}$ die Menge aller Bilder von f, $\mathcal{U}$ bildet also den davon erzeugten Untervektorraum. In $\mathcal{U}$ liegt z.B. für $v, v' \in \mathbb{R}^m$: $w := f(v + v') - f(v) - f(v')$. Dieser Vektor ist konstruiert aus einzelnen Bildvektoren unter der festen Abbildung f mit $f(v + v'), f(v), f(v') \in \mathcal{U}$, also auch $w \in \mathcal{U}$. Um die Linearität zu zeigen, muss unter Anderem gezeigt werden, dass $w = 0$ ist.

Behauptung: $w \perp \mathcal{U}$, damit auch $w \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$, also $w = 0$ und somit $f(v + v') = f(v) + f(v')$.

Beweis: Sei etwa $f(v'')$ aus $\mathcal{U}$ gewählt, $v'' \in \mathbb{R}^m$. Wir zeigen nun, dass $w \perp \mathcal{U}$.

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\big((w, f(v''))\big) &= \big((f(v + v') - f(v) - f(v'), f(v''))\big) \\
&= \big((f(v + v'), f(v''))\big) - \big((f(v), f(v''))\big) - \big((f(v'), f(v''))\big)
\end{aligned}
$$

Da f metrisch ist, also f mit dem Skalarprodukt verträglich ist, gilt auch:

$$
\begin{aligned}
&= \big((v + v', v'')\big) - \big((v, v'')\big) - \big((v', v'')\big) \\
&= \big((v + v' - v - v', v'')\big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt: $w \perp f(v'')$ für alle $v'' \in \mathbb{R}^m$. w ist also senkrecht zu einem Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$ und somit wegen der Bilinearität des Skalarproduktes zu ganz $\mathcal{U}$.

■

Die Beweise der übrigen Bestandteile des Satzes 2 wurden in der darauffolgenden Vorlesung behandelt.