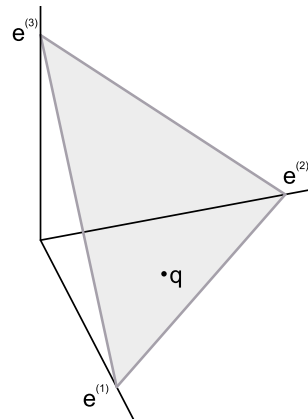


Geometrie – Ausarbeitung der Vorlesung vom 07.12.2009

von Carina Balster und Jonas Sluiter

§3 Beispiel 18



$q \in \mathcal{C}(e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$ ist kein innerer Punkt des ganzen Simplex $\mathcal{C}(0, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$, aber relativ innerer Punkt nach vorangegangener Definition.

Satz 19: Grundlegende Eigenschaften innerer Punkte

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex mit $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$.

(a) $(p \in C, q \in \overset{\circ}{C}, p \neq q) \Rightarrow]p, q[\subseteq \overset{\circ}{C}$.

(b) $\overset{\circ}{C}$ ist konvex.

(c) $\overset{\circ}{C} \subseteq C \subseteq \overline{\overset{\circ}{C}}$

Beweis:

(a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex mit $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. Weiterhin seien $p \in C, q \in \overset{\circ}{C}, p \neq q$ und $\epsilon > 0$ derart, dass $\mathcal{K}_{q, \epsilon} \subset C$. Ohne Einschränkungen ist $p \notin \mathcal{K}_{q, \epsilon}$ und $A := \mathcal{C}(\{p\} \cup \mathcal{K}_{q, \epsilon})$. Auf Grund der Wahl von ϵ ist $A \subseteq C$ wie in Abbildung 1 dargestellt.

Sei nun $y \in]p, q[$, d. h. $y = p + \lambda(q - p)$ mit $0 < \lambda < 1$, gewählt. Wir zeigen nun $\mathcal{K}_{y, \lambda\epsilon} \subseteq A$.

Für Punkte $z \in \mathcal{K}_{y, \lambda\epsilon}$ wird festgestellt: $\|z - y\| \leq \lambda\epsilon \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\|z - y\| \stackrel{\lambda > 0}{\leq} \|\frac{1}{\lambda}(z - y)\| \leq \epsilon \Rightarrow q + \frac{1}{\lambda}(z - y) \subseteq \mathcal{K}_{q, \epsilon}$.

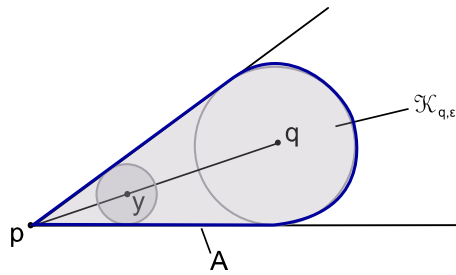


Abbildung 1: Skizze zu Beweis 19(a)

Es ist $z = y + (z - y) = p + \lambda(q - p) + (z - y) = (1 - \lambda)p + \lambda \underbrace{\left(q + \frac{1}{\lambda}(z - y)\right)}_{\in \mathcal{K}_{q,\epsilon}}$,

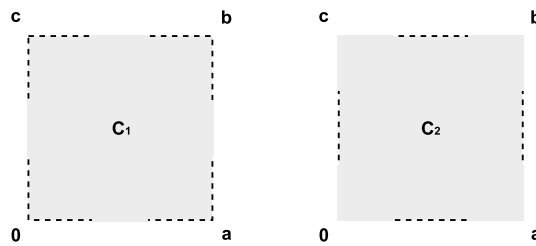
also ist $z \in A$, denn dies ist eine Konvexkombination von p und einem weiteren Punkt aus der konvexen Menge A . Damit ist $y \in \overset{\circ}{A}$ und insbesondere $y \in \overset{\circ}{C}$, woraus direkt $]p, q] \subseteq \overset{\circ}{C}$ folgt.

(b) Wenn $p \in \overset{\circ}{C}$, folgt in (a) für alle $q \in \overset{\circ}{C}$: $]p, q] \subseteq \overset{\circ}{C}$. $\overset{\circ}{C}$ ist demnach konvex.

(c) $\overset{\circ}{C} \subseteq C$ ist klar nach Definition von $\overset{\circ}{C}$. Beweis von " $C \subseteq \overline{\overset{\circ}{C}}$ ": Sei $q \in \overset{\circ}{C}$. Für alle $p \in C$ ist nach a) $]p, q] \subseteq \overset{\circ}{C}$ und dann $]p, q] = \overline{]p, q]} \subseteq \overline{\overset{\circ}{C}}$ und somit $p \in \overline{\overset{\circ}{C}}$.

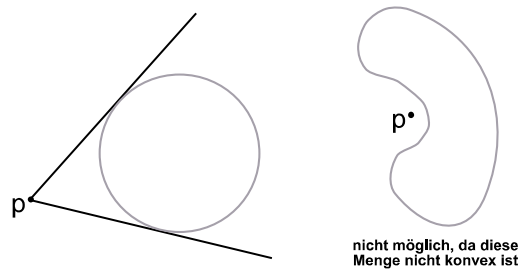
Grafisches Beispiel zur möglichen Lage von Randpunkten

Es sind zwei Mengen $\overset{\circ}{C} = \mathcal{C}(0, a, b, c)$ dargestellt, von denen C_1 konvex ist, C_2 jedoch nicht, da die die Verbindungsstrecken der Randpunkte von C_2 nicht in C_2 enthalten sind.

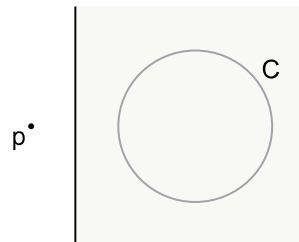


Heuristische Vorüberlegung zur Beschreibung konvexer Mengen mit Halbräumen, bzw. als Lösungsmenge linearer Ungleichungssysteme (Satz 14(c)).

Seien $\emptyset \neq C \neq \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, C konvex, $C = \overline{C}$ (p liegt nicht auf dem Rand).



Vermutlich gibt es stets eine Gerade, die den Punkt p von der konvexen Menge C trennt.



Satz 20

Konvexe Mengen $\neq \mathbb{R}^n$ müssen in Halbräumen liegen, oder äquivalent ausgedrückt: Die einzige konvexe Menge, die nicht in einem Halbraum liegt, ist \mathbb{R}^n . Stichwort "Trennungssatz", siehe [L] Kap. 3.4.

Beweisidee für \mathbb{R}^2

Der allgemeine Beweis ist knifflig, daher nur hier nur eine Beweisidee für \mathbb{R}^2 mit $C = \overline{C} \neq \emptyset$, $C \neq \mathbb{R}^2$ (vgl. Abbildung 2).

Sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ und $\mu = \min_{c \in C} \|c - p\|$ der Abstand von p und C . Dieses $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, da die Funktion $\|c - p\|$ wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit von C ein Minimum annimmt. Sei ferner $c^* \in C$ mit $\|c^* - p\| = \mu$ und Y die Tangente an $\mathcal{K}_{p,\mu}$ in c^* . Dann ist zu zeigen: $C \subseteq \mathcal{H}_{Y,c^*-p}$.

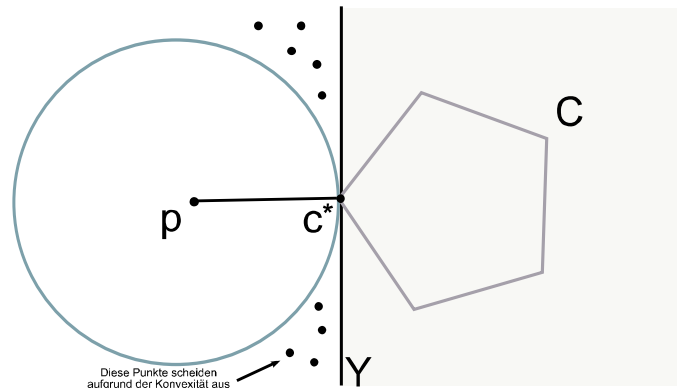


Abbildung 2: Skizze zum Beweis von Satz 20

Mit Satz 20 kommen wir zu dem Hauptergebnis, dem

Hauptsatz 21

Jede konvexe Menge C in \mathbb{R}^n mit $\emptyset \neq C \neq \mathbb{R}^n$ und mit $C = \overline{C}$ ist Durchschnitt von Halbräumen. Es genügen diejenigen, die "berühren".¹ Anschaulich klar ist, dass bei Polytopen endlich viele Halbräume zur Darstellung genügen.

Literatur: [L] (Ziel: Geometrie) und [F] Ziel: Lineare Optimierung

Kapitel 2: Analytische Geometrie in euklidischen Vektorräumen

§4 Wiederholungen und Beispiele

Zunächst eine Klärung ausgewählter Grundbegriffe der Linearen Algebra:

Euklidischer Vektorraum:

Ein euklidischer Vektorraum ist ein \mathbb{R} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

Standardskalarprodukt:

Das Standardskalarprodukt ist definiert als: $((\cdot, \cdot)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $((x, y)) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. $((\cdot, \cdot))$ ist bilinear, symmetrisch und positiv definit. Damit

¹Unter Umständen sind sehr viele nötig, z. B. bei einer Kugel, bei der für jeden Punkt auf dem Rand ein Halbraum nötig ist.

kann für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Länge (bzw. Norm) von x als $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und entsprechend der Abstand von x und y als $\|x - y\|$ angegeben werden.

Winkelmessung:

Für $x \neq 0 \neq y$ ist: $\cos(\angle(x, y)) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Diese Definition des Kosinus wird aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung hergeleitet. Sie lautet: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $x \perp y$ (d. h. x und y liegen senkrecht zueinander), wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

Rechenregel:

$$\begin{aligned} \langle (x+y, x+y) \rangle &\stackrel{\text{Bilin.}}{=} \langle (x, x+y) \rangle + \langle (y, x+y) \rangle \stackrel{\text{Bilin.}}{=} \langle (x, x) \rangle + \langle (x, y) \rangle + \langle (y, x) \rangle + \langle (y, y) \rangle \stackrel{\text{Symm.}}{=} \\ &\|x\|^2 + \underbrace{2\langle (x, y) \rangle}_{=0, \text{ wenn } x \perp y} + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Orthogonale und orthonormale Basis:

Eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ heißt Orthogonalbasis, d. h. die Basisvektoren sind paarweise orthogonal. Gilt darüber hinaus noch $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ für $i = 1, \dots, n$, so nennt man sie eine Orthonormalbasis, d. h. die Basisvektoren sind paarweise orthogonal und normiert. Verfahren zur Berechnung sind aus der Linearen Algebra bekannt.

Orthogonale Komplemente:

Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmenge ist $M^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in M : x \perp y\}$ stets ein Untervektorraum auf Grund der Bilinearität des Skalarproduktes. Dabei gilt: $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \oplus M^\perp = \mathbb{R}^n$. Es ist zu beachten, dass bei dem Operator \oplus der Durchschnitt der Argumente $\{0\}$ ergibt.

Schreibweise: $\langle M \rangle \perp M^\perp$

Wichtige Regel: $(M^\perp)^\perp = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, da M nicht unbedingt ein UVR ist. Dabei ist zu beachten: $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$.

Beobachtung 1: Normalenform von affinen Unterräumen

Sei Γ ein aUR von \mathbb{R}^n , etwa $\Gamma = a + U$, mit $\dim U = r$. Sei $c^{(1)}, \dots, c^{(n-r)}$ Basis von U^\perp . Dann ist: $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c^{(i)} \rangle = \langle a, c^{(i)} \rangle, 1 \leq i \leq n-r\}$

Beweis:

Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: (für $1 \leq i \leq n-r : \langle x, c^{(i)} \rangle = \langle a, c^{(i)} \rangle$) \Leftrightarrow (für $1 \leq i \leq n-r : (x-a) \perp c^{(i)}$) $\Leftrightarrow (x-a) \perp U^\perp \Leftrightarrow (x-a) \in U^{\perp\perp} \stackrel{U=U^{\perp\perp}}{\Leftrightarrow} (x-a) \in U \Leftrightarrow x \in \Gamma$