Vorlesungsausarbeitung vom 11.01.2010

vorgelegt von Bastian Freese und Laura Höffer

Einordnung in die Vorlesung

Die Vorlesung vom 11.01.2010 gehört zu §6 „Anfänge der euklidischen Elementargeometrie". Ein Schwerpunkt von §6 bildet die Dreiecksgeometrie. Die Dreiecksgeometrie befasst sich vor allem mit Eigenschaften allgemeiner und spezieller Dreiecke. Ihr wird eine große Bedeutung für die euklidische Geometrie zugesprochen, da beliebige Vielecke eine Zusammensetzung aus Dreiecken darstellen.

Die Vorlesung vom 11.01 ist am Anfang von §6 eingeordnet. Zuvor wurde der Satz über die Winkelsumme, die Begriffe Schwerpunkt z, Seitenmittelpunkte, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte sowie Höhe behandelt. Ferner wurden der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m (Satz 5) und der Schnittpunkt der Höhen h (Satz 6) eingeführt und bewiesen.

Satz 6 wird zu Beginn dieser Ausarbeitung nochmals aufgegriffen und bewiesen, da der Beweis in der Vorlesung vom 11.01 nicht abgeschlossen wurde. Im Anschluss werden Zusammenhänge zwischen den drei eingeführten Bezeichnungen m, z und h hergestellt. Zwei wichtige Themen dieser Vorlesung sind somit die Eulersche Gerade sowie der Feuerbachkreis.

<u>Satz 6:</u> Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ nicht kollinear. Die Höhen sind kopunktal mit eindeutigem Schnittpunkt, der im weiteren Verlauf der Vorlesung mit dem Buchstaben h bezeichnet wird.

Die Höhen, d.h. die Lote zu den Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Ecken, können durch die drei folgenden Normalenformen aufgestellt werden:

$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, b-c)) = ((a, b-c))\}$$
$$H_b = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, c-a)) = ((b, c-a))\}$$
$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, b-a)) = ((c, b-a))\}.$$

Im nachfolgenden Beweis von Satz 6 werden diese Normalenformen verwendet, um die Eindeutigkeit des Höhenschnittpunktes zu beweisen.

Beweis (Satz 6): Ziel ist es, zu zeigen, dass der Durchschnitt von H_a und H_b eine Teilmenge von H_c ist.

Seien $H_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, b-c)) = ((a, b-c))\}$ und $H_b = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, c-a)) = ((b, c-a))\}$

Durch Addition der Bedingungen ergibt sich folgende Gleichung:

$$((x, b-a)) = ((x, b-c)) + ((x, c-a)) = ((a, b-c)) + ((b, c-a)) \qquad \text{(i)}$$

Es gilt: $((x, b-c)) + ((x, c-a)) = ((x, b-a))$

Mit (i) folgt dann: $((x, b-a)) = ((a, b-c)) + ((b, c-a)) = ((a, b)) - ((a, c)) + ((b, c)) - ((a, b))$
$= ((-a, c)) + ((b, c)) = ((c, b-a))$

Es folgt: $x \in H_a \cap H_b \rightarrow x \in H_c$ mit $H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, b-a)) = ((c, b-a))\}$.

Es wurde somit gezeigt, dass $H_a \cap H_b \subseteq H_c$. Da a, b, c nicht kollinear sind, bedeutet dies, dass der Schnittpunkt von H_a und H_b eindeutig ist und auf der Geraden H_c liegt. Es gibt also einen eindeutigen Schnittpunkt aller drei Höhen. $\square$

<u>Bemerkung 7</u>: m und h können anhand der Normalenformen für Mittelsenkrechten und Höhen berechnet werden (siehe dazu auch das Zahlenbeispiel 17 der nächsten Vorlesung).

Zusammenhang zwischen dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m, dem Schwerpunkt z und dem Höhenschnittpunkt h

Satz 8: Seien a, b, c affin unabhängig.

a) Dann gilt die Gleichung $3z=2m+h$. Diese Gleichung wird als „Eulergleichung“ bezeichnet.

b) Wenn $m\neq z$, dann heißt $m\vee z$ „Eulergerade“ und es gilt: $h\in m\vee z$ und $TV(m,z,h)=3$.

Beweis (Satz 8):

Gezeigt wird jetzt: $3z-2m\in H_a, H_b$ und H_c.

Nach Satz 5(b) gilt: $\|a-m\|=\|b-m\|=\|c-m\|$ (i)

Nach Def. 3(i) gilt: $z=\frac{1}{3}(a+b+c)$, oder äquivalent: $3z=(a+b+c)$ (ii)

$$
\begin{aligned}
\text{Dann folgt: } ((3z-2m,b-a)) &\overset{(ii)}{=} ((a+b+c-2m,b-a))\\
&=(((a-m)+(b-m)+(c-m)+m,(b-m)-(a-m)))\\
&=((a-m,b-m))+(((a-m),-(a-m)))+((b-m,b-m))\\
&\quad +(((b-m),-(a-m)))+((c-m,b-m-(a-m)))+((m,b-m-a+m))\\
&=((a-m,b-m))-\|a-m\|^2+\|b-m\|^2-((b-m,a-m))+((c-m,b-a))+((m,b-a))\\
&\overset{(i)}{=}-\|b-m\|^2+\|b-m\|^2+((c-m,b-a))+((m,b-a))\\
&=((c-m,b-a))+((m,b-a))\\
&=((c-m+m,b-a))\\
&=((c,b-a))
\end{aligned}
$$

Es wurde somit gezeigt, dass $((3z-2m,b-a))=((c,b-a))$ gilt. Daraus folgt, dass $3z-2m\in H_c$.
Analog kann gezeigt werden, dass außerdem $3z-2m\in H_a$ und $3z-2m\in H_b$.
$3z-2m$ liegt daher auf allen drei Höhen. Mit Satz 6 folgt: $3z-2m=h$.

□

b)

Sei $m\neq z$.

(i) Wir zeigen jetzt: $h\in m\vee z$ mit $m\vee z=\{m+\lambda(z-m),\lambda\in K\}$.
Mit Satz 8a folgt: $h=3z-2m=m+3(z-m)$.
Somit folgt, dass $h\in m\vee z$.

(ii) Gezeigt wird jetzt: $TV(m,z,h)=3$.
Mit Satz 8(a) folgt: $h=3z-2m=m+3(z-m)$. Dann folgt: $TV(m,z,h)=3$

□

Die Eulergerade wurde nach dem Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) benannt. Auf der Eulergeraden befinden sich der Schwerpunkt z, der Höhenschnittpunkt h und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m eines Dreiecks.

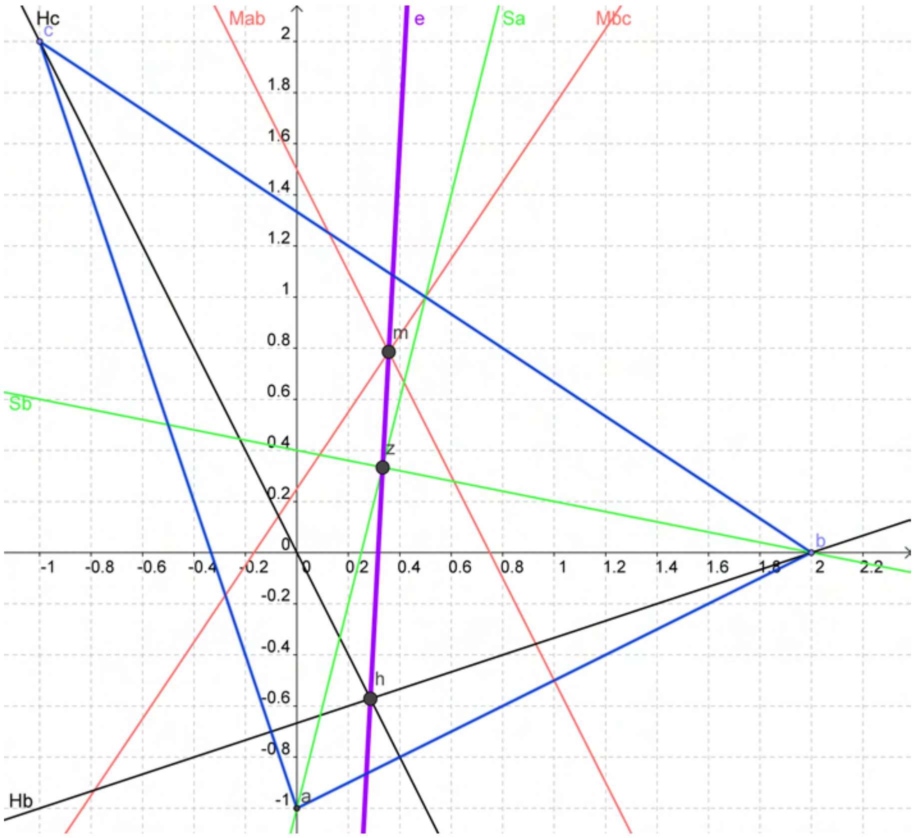

Abbildung 1: Beispiel einer Eulergeraden

Bei besonderen Dreiecken fallen der Schwerpunkt z und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m zusammen. Dies ist genau bei einem gleichseitigen Dreieck der Fall.

<u>Beobachtung 9</u>: $z = m \Leftrightarrow \|b - a\| = \|c - b\| = \|a - c\|$ „gleichseitiges Dreieck“

Beweis (Beobachtung 9):

'⇒' Sei $z=m$.

Nach Satz 5(b) gilt: $\|m-a\|=\|m-b\|=\|m-c\|$ $\quad (*)$

Nach Def. 3 (i) gilt: $z=\frac{1}{3}(a+b+c)$, oder äquivalent $0=-3z+(a+b+c)$.

Mit $z=m$ folgt dann: $0=-3m+(a+b+c)=(a-m)+(b-m)+(c-m)$.

Wir multiplizieren nun $0=(a-m)+(b-m)+(c-m)$ mit $(a-m)$, $(b-m)$ bzw. $(c-m)$ mit Hilfe des Skalarproduktes und erhalten folgende Gleichungen:

(i) $\|a-m\|^2+((b-m,a-m))+((c-m,a-m))=0$

(ii) $((a-m,b-m))+\|b-m\|^2+((c-m,b-m))=0$

(iii) $((a-m,c-m))+((b-m,c-m))+\|c-m\|^2=0$

Differenzenbildung ergibt dann:

(i)−(ii): $\|a-m\|^2+((c-m,a-m))-((c-m,b-m))-\|b-m\|^2=0$

(i)−(iii): $\|a-m\|^2+((b-m,a-m))-((b-m,c-m))-\|c-m\|^2=0$

(ii)−(iii): $((a-m,b-m))+\|b-m\|^2-((a-m,c-m))-\|c-m\|^2=0$

Da nach Satz 5(b) $\|m-a\|=\|m-b\|=\|m-c\|$ gilt, können diese drei Gleichungen vereinfacht werden. Wir erhalten dann folgende Gleichungen:

$((c-m,a-m))=((c-m,b-m))$ $\quad$ (A)

$((b-m,a-m))=((b-m,c-m))$ $\quad$ (B)

$((a-m,b-m))=((a-m,c-m))$ $\quad$ (C)

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass $\|a-b\|=\|c-b\|$.

Für $\|a-b\|^2$ gilt:

$$\|a-b\|^2=\|(a-m)-(b-m)\|^2=\|((\ (a-m)-(b-m),(a-m)-(b-m)\ ))\|$$
$$=\|((a-m,a-m))-2((a-m,b-m))+((b-m,b-m))\|$$
$$\overset{(B)}{=}\ \|((a-m,a-m))-2((b-m,c-m))+((b-m,b-m))\|=\|\|\|a-m\|^2-2((b-m,c-m))+((b-m,b-m))\|$$
$$\overset{5b}{=}\ \|\|\|c-m\|^2-2((c-m,b-m))+((b-m,b-m))\|=\|((c-m,c-m))-2((c-m,b-m))+((b-m,b-m))\|$$
$$=\ \|((\ (c-m)-(b-m),(c-m)-(b-m)\ ))\|=\|(c-m)-(b-m)\|^2=\|c-b\|^2$$

Daraus folgt, dass $\|a-b\|=\|c-b\|$.

Analog kann gezeigt werden, dass auch $\|a-b\|=\|a-c\|$ gilt.

'⇐' Unabhängig von Voraussetzungen gilt für beliebige Vektoren a,b,c,m:

$$\|b-a\|^2=(((b-m)-(a-m),(b-m)-(a-m)))=\|b-m\|^2-2((b-m,a-m))+\|a-m\|^2 \qquad (1)$$

Die Gleichung (1) hat noch die beiden Varianten

$$\|c-b\|^2=(((c-m)-(b-m),(c-m)-(b-m)))=\|c-m\|^2-2((c-m,b-m))+\|b-m\|^2 \qquad (2)$$
$$\|a-c\|^2=(((a-m)-(c-m),(a-m)-(c-m)))=\|a-m\|^2-2((a-m,c-m))+\|c-m\|^2 \qquad (3)$$

Mit der Gleichseitigkeit und Satz 5b ergibt die Differenz je zweier der drei Gleichungen (1)−(3) wieder (A), (B) und (C) aus dem ersten Teil des Beweises.

Man stellt fest, dass

$$((a+b+c-3m, a-c)) = (((a-m)+(b-m)+(c-m), (a-m)-(c-m)))$$
$$= \|a-m\|^2 + ((b-m, a-m)) + ((c-m, a-m)) - ((a-m, c-m)) - ((b-m, c-m)) - \|c-m\|^2 = 0$$

Das gleiche gelingt mit $(b-a)$ und $(c-b)$.

Der Vektor $a+b+c-3m$ steht somit senkrecht auf drei affin unabhängigen Vektoren und ist somit der Nullvektor. Eine einfache Umformung ergibt dann $\frac{1}{3}(a+b+c) = m$. Somit folgt $z = m$.

$\square$

Der folgende Satz stellt einen Nachtrag zum Umkreis dar: Drei affin unabhängige Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ legen einen eindeutigen Kreis fest, der durch diese Punkte geht.

<u>Satz 10</u>: Seien a, b, c affin unabhängig in $\mathbb{R}^2$.
Dann existiert genau ein $q \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, sodass gilt: $\{a, b, c\} \subseteq S_{q,t} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-q\| = t\}$.

o. Beweis.

Nach Satz 10 reichen drei Punkte aus, um einen Kreis eindeutig festzulegen, der durch diese drei Punkte verläuft. Ein besonderer Kreis, der dadurch eindeutig festgelegt ist, ist der Feuerbachkreis.

Definition 11: Seien a, b, c affin unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Der Kreis durch die drei Seitenmitten

$$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2} \text{ und } \frac{c+a}{2}$$ heißt Feuerbachkreis.

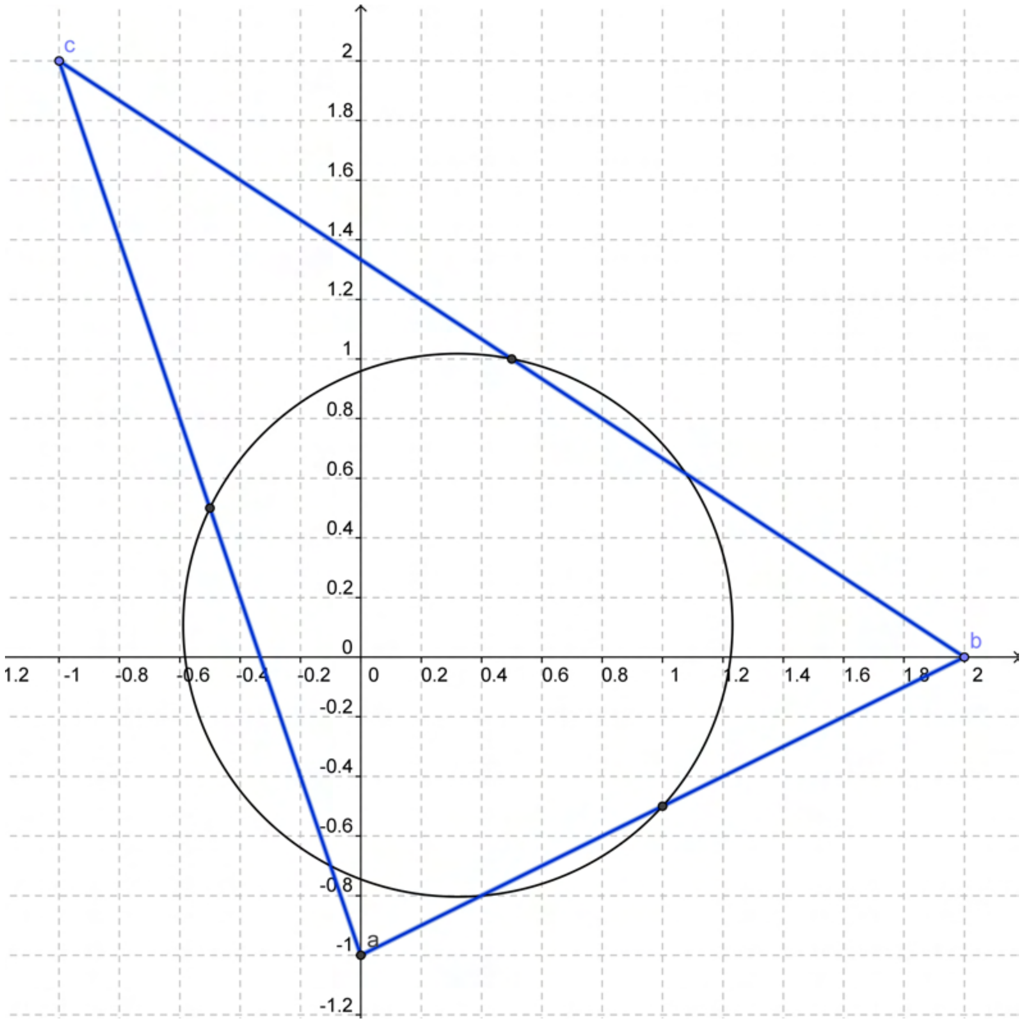

Abbildung 2: Beispiel eines Feuerbachkreises

<u>Satz 12</u>: Seien a, b, c affin unabhängig in $\mathbb{R}^2$ und sei f der Mittelpunkt des Feuerbachkreises des Dreiecks a, b, c. Dann gilt:

(a) die Feuerbachgleichung: $3z = 2f + m$.

(b) $f \in m \vee z$. Ferner gilt dann: $TV(m,z,f) = \frac{3}{2}$ und $TV(m,h,f) = \frac{1}{2}$.

Der Mittelpunkt f des Feuerbachkreises liegt also auf der Eulergeraden in der Mitte zwischen dem Schnittpunkt m der Mittelsenkrechten und dem Höhenschnittpunkt h.

(c) Der Radius r_f des Feuerbachkreises ist gleich der Hälfte des Umkreisradius r_u.

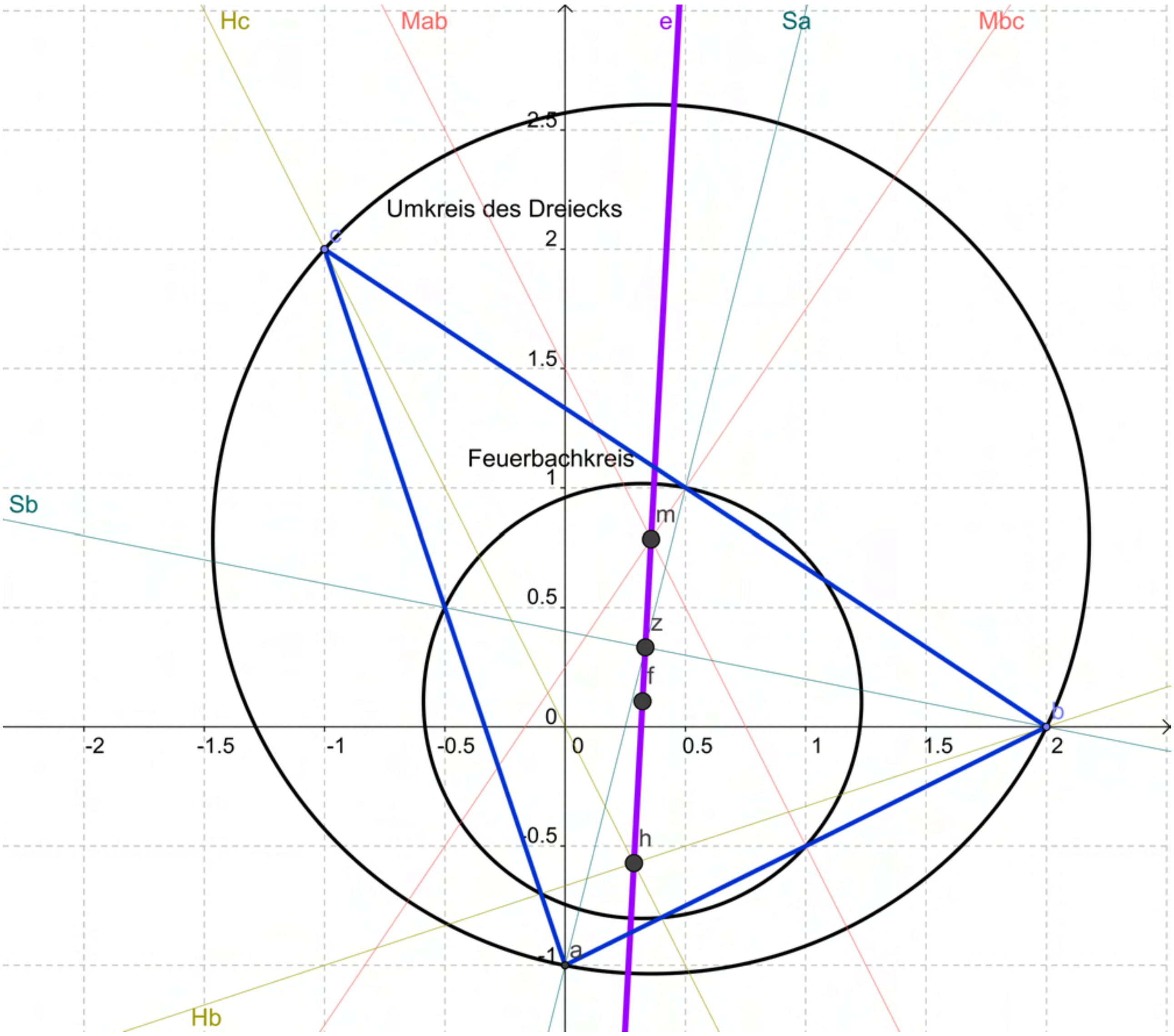

Abbildung 3: Beispiel zu Feuerbachkreis, Eulergerade und Umkreis

Beweis (Satz 12):

zu (a): Nach Def. 11 gilt: $\|f-\frac{a+b}{2}\|=\|f-\frac{b+c}{2}\|=\|f-\frac{c+a}{2}\|=r_f=$ Radius des Feuerbachkreises.

Nach Def.3 (i) gilt: $z=\frac{1}{3}(a+b+c)$, oder äquivalent: $3z=a+b+c \quad (*)$

Für den Radius des Feuerbachkreises gilt dann:

$r_f=\|f-\frac{a+b}{2}\|=\frac{1}{2}\|2f-(a+b)\| \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\|2f-(3z-c)\|=\frac{1}{2}\|-3z+2f+c\|=\frac{1}{2}\|(3z-2f)-c\|.$

Analog ergibt sich: $\|f-\frac{b+c}{2}\|=\frac{1}{2}\|(3z-2f)-a\|$ und $\|f-\frac{c+a}{2}\|=\frac{1}{2}\|(3z-2f)-b\|.$

$3z-2f$ ìst also von a, b und c gleich weit entfernt.
Daraus folgt, dass $3z-2f=m$ der Mittelpunkt des Umkreises ist.
Eine Umformung ergibt: $3z=2f+m$.

zu (b): (i) Beh.: $f\in m\vee z$ mit $m\vee z:=\{m+\lambda(z-m):\lambda\in k\}$ und $TV(m,z,f)=\frac{3}{2}$.

Laut Satz 12 (a) gilt: $3z=2f+m$. Umordnen ergibt folgende Darstellung für f: $f=m+\frac{3}{2}(z-m)$.

Es folgt daraus direkt: $f\in m\vee z$ und $TV(m,z,f)=\frac{3}{2}$.

(ii) Zu zeigen ist nur noch: $TV(m,h,f)=\frac{1}{2}$.

Laut 12 (a) gilt: $3z=2f+m \quad (*)$
Laut 8 (a) gilt: $3z=2m+h \quad (**)$
Setze $(*)$ und $(**)$ gleich. Dann ergibt sich folgende Implikationskette:

$$2f+m=2m+h \rightarrow 2f=m+h \rightarrow f=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}h \rightarrow f=m+\frac{1}{2}(h-m) \rightarrow TV(m,h,f)=\frac{1}{2}$$

zu (c): zu zeigen: $r_f=\frac{1}{2}r_u$.

Nach Satz 5 gilt: $r_u=\|m-a\|=\|m-b\|=\|m-c\|$.

Nach Satz 12 (a) gilt: $3z=2f+m$. Umordnen ergibt folgende Darstellung für f: $f=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}m \quad (*)$

Nach Def.11 gilt: $r_f=\|f-\frac{a+b}{2}\| \overset{(*)}{=} \|\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}m-\frac{a+b}{2}\| \overset{\text{Def. 3 (i)}}{=} \|\frac{3}{2}(\frac{1}{3}(a+b+c))-\frac{1}{2}m-\frac{a+b}{2}\|$

$$=\|\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\|=\|\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}m\|=\frac{1}{2}\|c-m\|=\frac{1}{2}r_u$$

□

Neben den drei Seitenmitten liegen weitere markante Punkte auf dem Feuerbachkreis. Ein Beispiel für weitere Punkte sind die Mitten der Höhenabschnitte.

<u>Beobachtung 13</u>: Die Mitten der Höhenabschnitte $\frac{h+a}{2}$, $\frac{h+b}{2}$ und $\frac{h+c}{2}$ liegen auf dem Feuerbachkreis.

Der Feuerbachkreis ist nach dem deutschen Mathematiker Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) benannt.

Dieser Kreis wird auch als Neun-Punkte-Kreis bezeichnet, da auf ihm neun besondere Punkte liegen: die Mittelpunkte der Seiten (Definition 11), die Fußpunkte der Höhen und die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte (Beobachtung 13).

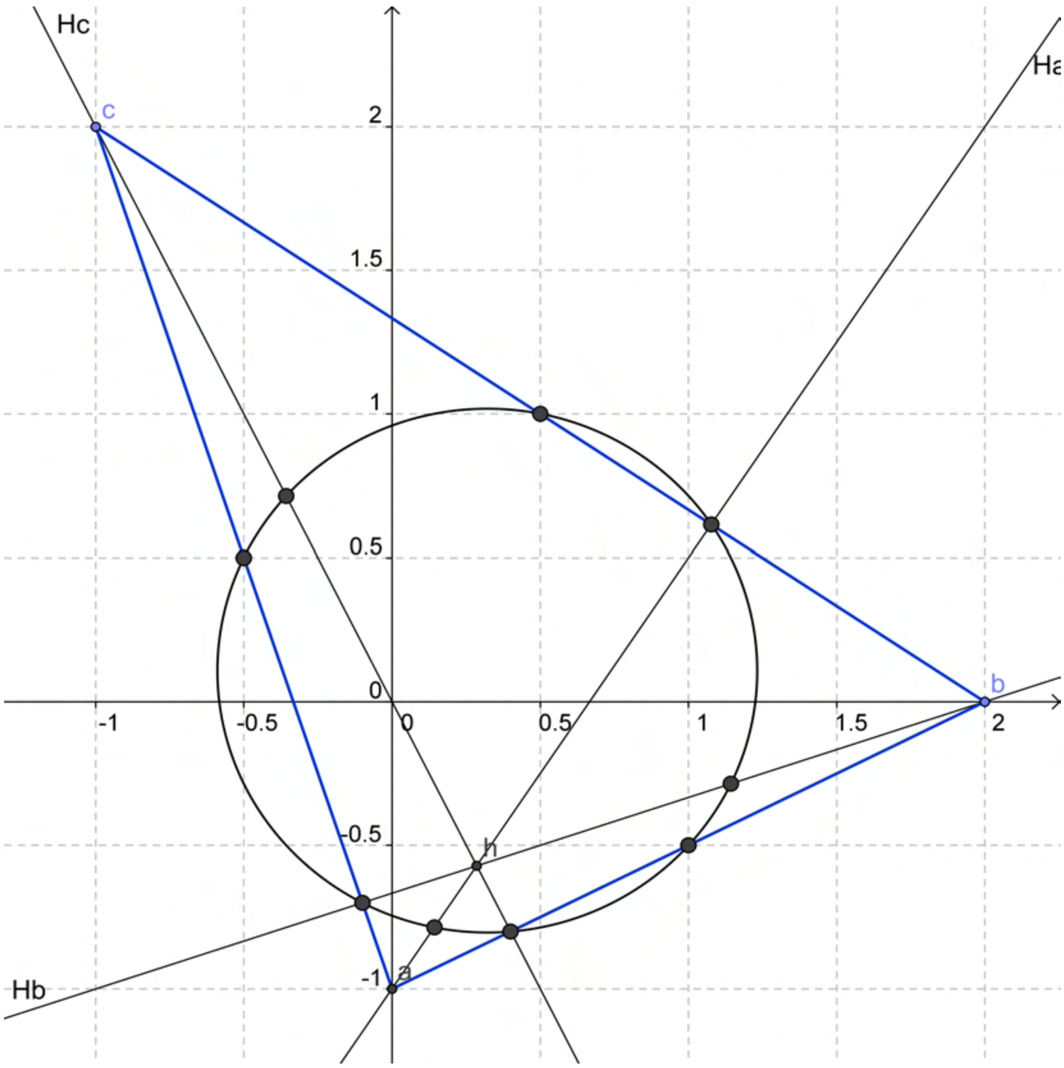

Abbildung 4: Beispiel eines Feuerbachkreises mit den erwähnten neun besonderen Punkten

Beweis (Beobachtung 13):

Nach Satz 12(a) gilt: $3z=2f+m$. Umordnen ergibt folgende Darstellung für f: $f=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}m$ (i)

Nach Satz 8(a) gilt: $3z=2m+h$ (ii)

Im folgende Abschnitt wird zunächst gezeigt, dass $(f-\frac{a+b}{2})=-(f-\frac{h+c}{2})$ ist, denn dann kann gefolgert werden, dass $\|f-\frac{a+b}{2}\|=r_f=\|f-\frac{h+c}{2}\|$.

$$(f-\frac{a+b}{2})+(f-\frac{h+c}{2})=2f-\frac{a+b}{2}-\frac{h+c}{2}f=\frac{a+b}{2}2f-\frac{a+b+c+h}{2}\overset{\text{Def.3}}{=}2f-\frac{3z+h}{2}\overset{(i)}{=}2(\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}m)-\frac{3z+h}{2}$$
$$=3z-m-\frac{3z+h}{2}\overset{(ii)}{=}\frac{2m+2h-3z-h}{2}=\frac{2m+h-3z}{2}\overset{(ii)}{=}\frac{3z-3z}{2}=0$$

Somit folgt, dass $(f-\frac{a+b}{2})=-(f-\frac{h+c}{2})$ ist.

Damit gilt: $\|f-\frac{a+b}{2}\|=r_f=\|f-\frac{h+c}{2}\|$.

Es konnte gezeigt werden, dass der Abstand vom Mittelpunkt des Feuerbachkreises zum Mittelpunkt der Strecke [h, c] der Radius des Feuerbachkreises ist. Analog kann dies auch für die Abstände der Mittelpunkte der anderen Höhenabschnitte gezeigt werden.

Somit liegen $\frac{h+a}{2}$, $\frac{h+b}{2}$ und $\frac{h+c}{2}$ auf dem Feuerbachkreis.

□

<u>Satz 14:</u> Seien a,b,c affin unabhängig. Dann gilt:

$W_a=a+\langle\|c-a\|(b-a)+\|b-a\|(c-a)\rangle_{\mathbb{R}}$
$W_b=b+\langle\|c-b\|(a-b)+\|a-b\|(c-b)\rangle_{\mathbb{R}}$
$W_c=c+\langle\|a-c\|(b-c)+\|b-c\|(a-c)\rangle_{\mathbb{R}}$

sind kopunktal mit genau einem Schnittpunkt w.

Mit $\xi=\alpha+\beta+\gamma$ Umfang des Dreiecks und mit $\alpha=\|c-b\|$, $\beta=\|a-c\|$, $\gamma=\|b-a\|$ gilt für w:
$w=\frac{1}{\xi}(\alpha a+\beta b+\gamma c)$.

Beweis (Satz 14):

Im Folgenden wird gezeigt, dass $w \in W_a$ und $w \in W_b$ und $w \in W_c$.

Sei $w = \frac{1}{\xi}(\alpha a + \beta b + \gamma c)$. Dann gilt:

$$w - a = \frac{1}{\xi}(\alpha a + \beta b + \gamma c) - a = \frac{1}{\xi}((\alpha - \xi) a + \beta b + \gamma c) = \frac{1}{\xi}((\alpha - (\alpha + \beta + \gamma)) a + \beta b + \gamma c)$$

$$= \frac{1}{\xi}(\beta(b - a) + \gamma(c - a)).$$

Somit folgt: $w = a + \frac{1}{\xi}(\beta(b - a) + \gamma(c - a)) = a + \frac{1}{\xi}(\|c - a\|(b - a) + \|b - a\|(c - a))$.

Es wurde somit gezeigt, dass $w \in W_a$. Analog kann bewiesen werden, dass außerdem $w \in W_b$ und $w \in W_c$. w ist also der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden.

$\square$

Der Schnittpunkt w der Winkelhalbierenden liegt stets im Innern des Dreiecks a, b, c, denn für w gilt:

$w = \frac{1}{\xi}(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} a + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} b + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} c$. Da die Summe der Koeffizienten $\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} = 1$ ist und jeder dieser Koeffizienten > 0 ist, ist w ein innerer Punkt des Dreiecks a, b, c.

Beispiel:

Seien $a=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.
Dann gilt: $\xi=\sqrt{1+4}+2+1=3+\sqrt{5}$.
$w=\frac{1}{\xi}(\alpha a+\beta b+\gamma c)=\frac{1}{\xi}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}38\\0{,}38\end{pmatrix}$.

Der Punkt w ist dabei der Mittelpunkt des Inkreises. Siehe dazu auch Beobachtung 16 der folgenden Vorlesung.

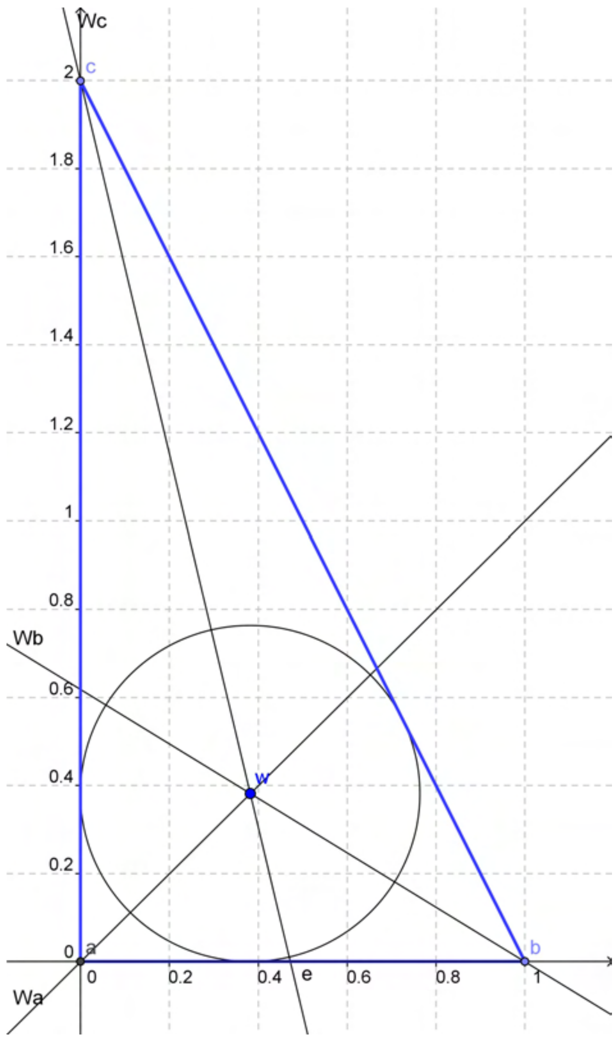

Abbildung 5: Schnittpunkt w der Winkelhalbierenden