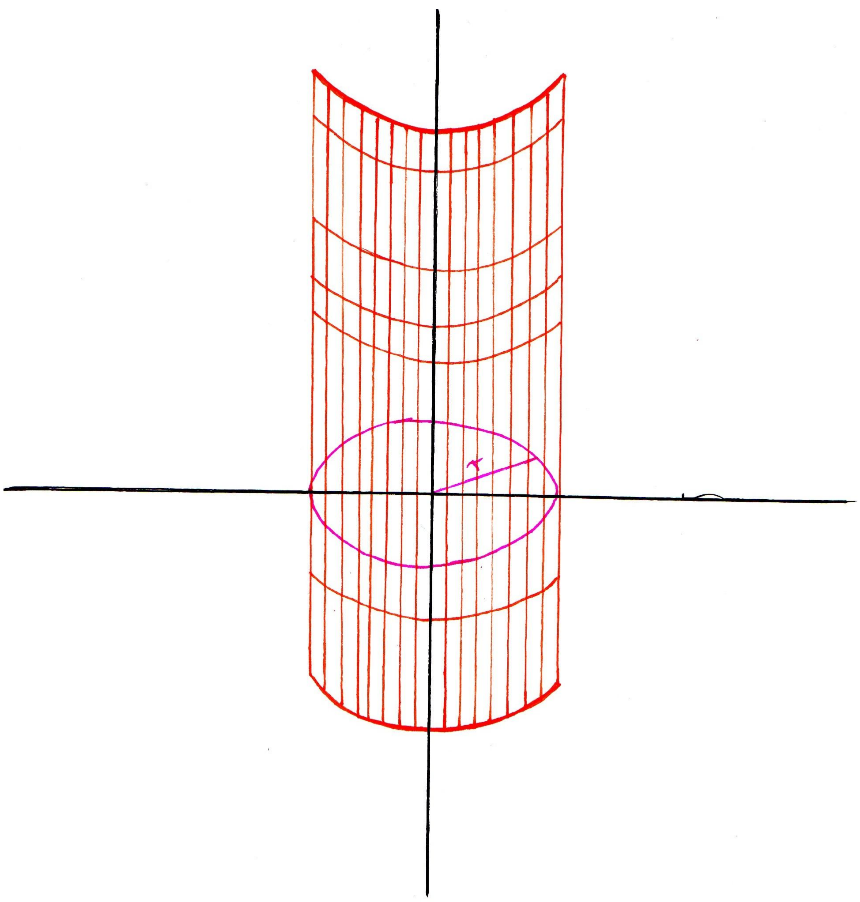
In der Vorlesung vom 18.01.10 wird mit § 7 über geometrische Objekte höheren Grades abgeschlossen und sogleich mit § 8, in dem erste Grundlagen der analytischen projektiven Geometrie behandelt werden, begonnen. Die Vorlesung knüpft direkt an die vorherige an, und zwar mit einer Ergänzung zu Beispiel 2 (b), (c) in § 7. In diesem Beispiel werden verschieden Varietäten behandelt.

Ergänzung zu Beispiel 2 (b), (c)

Sei $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - r^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, das heißt die Dimension ist n=3. Die Nullstellenmenge ist $V_{\mathbb{R}}^3(\varphi) = \{\begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} : w \in V_{\mathbb{R}}^2(x_1^2 + x_2^2 - r^2), \lambda \in \mathbb{R}\}$. $x_1^2 + x_2^2 - r^2$ ist die Gleichung einer 2-dimensionale Sphäre, und zwar eines Kreises. Die dritte Koordinate taucht hierbei gar nicht auf, das heißt, egal wie sie gewählt wird, ergibt sich immer eine Nullstelle. Dadurch kommt die Zylinderform bei n=3 zustande. Zweidimensional betrachtet, ist dies ein Spezialfall der Kugelsphäre, allerdings wurde hier die Dimension erhöht auf n=3, so dass $V_{\mathbb{R}}^3(\varphi)$ in dem Fall einen Zylinder beschreibt.

Skizze

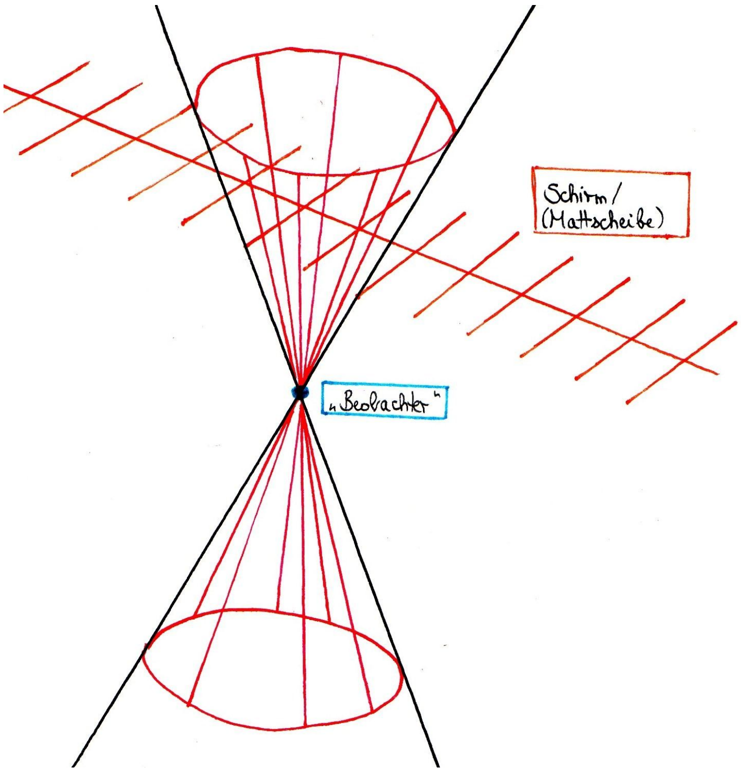


Fortsetzung von Bemerkung 4 (b)

Sei $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 r^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$, dann stellt $V_{\mathbb{R}}^3(\varphi)$ einen (Doppel-)Kegel dar.

Als Beispiel wichtig für den folgenden Abschnitt der projektiven Geometrie sind Schnitte mit einem solchen Kegel: Man nimmt eine kegelförmige Menge, die geschnitten wird mit Ebenen, die nicht durch den Nullpunkt gehen. Auf der Ebene hinterlässt der Kegel eine Spur. Die Vorstellung hierbei ist, dass die Ebene als Schirm bzw. Mattscheibe gesehen wird, ein Beobachter sich im Nullpunkt befindet und die Strahlen vom Nullpunkt aus die Lichtstrahlen vom Beobachter zur Ebene darstellen. Je nachdem wie der Schirm liegt, wird vom Beobachter eine andere Figur bzw. Linie wahrgenommen, die der Kegel als Spur hinterlässt.

Veranschaulichung



Dieses wurde früher in ähnlicher Art auf Holzschnitten dargestellt:

Ausgangspunkt der projektiven Geometrie ist, wie man räumliche Objekte sinnvoll in der Ebene darstellen kann. Die analytische Beschäftigung ist hierbei, die Gleichung der Spur zu bestimmen, die der Kegel in der Ebene hinterlässt. Dazu muss in der Ebene ein Koordinatensystem eingeführt werden und die Spur bezüglich dieses neuen Koordinatensystems dargestellt werden.

Weiterführung der Bemerkung 4 (b)

Es werden drei Schnitte von Varietäten betrachtet:

(i) $V_{\mathbb{R}}^3(\varphi)\cap\underbrace{V_{\mathbb{R}}^3(x_3-1)}_{=e^{(3)}+\langle e^{(1)},e^{(2)}\rangle}=\{\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}: w\in V_{\mathbb{R}}^2(x_1^2+x_2^2-r^2)\}$ Die Gleichung $x_1^2+x_2^2-r^2$ beschreibt einen Kreis.

(ii) $V_{\mathbb{R}}^3(\varphi)\cap\underbrace{V_{\mathbb{R}}^3(x_1-1)}_{=e^{(1)}+\langle e^{(2)},e^{(3)}\rangle}=\{\begin{bmatrix} 1 \\ w \end{bmatrix}: w\in V_{\mathbb{R}}^2(x_2^2+x_3^2r^2+1)\}$ Diese Gleichung $x_2^2+x_3^2r^2+1$ ist die Standardform eines Kegelschnitts und zwar einer Hyperbel.

(iii) $V_{\mathbb{R}}^3(\varphi)\cap\underbrace{V_{\mathbb{R}}^3(x_1-r^2x_2+r^2)}_{\text{Ebene}}=\{v\in\mathbb{R}^3: v_1=r^2(v_2-1),(v_1^2+v_2^2-v_3^2r^2)=0\}$ Hier wird der Kegel also mit einer Ebene geschnitten. Um zu erkennen, dass diese lineare Gleichung eine Ebene beschreibt, ist die Darstellung als Nullstellenmenge noch etwas ungewohnt. Die Nullstellenmenge einer linearen Gleichung ist aber nichts anderes, als die aus der Linearen Algebra bekannte Lösungsmenge. Wobei eine Lösungsmenge immer auch eine Nullstellenmenge ist, wenn man ein Gleichungssystem der Form $Ax-b=0$ löst.

§ 8 Erste Grundlagen der analytischen projektiven Geometrie

In Kapitel 0 wurde die ebene affine Inzidenzgeometrien behandelt. Jetzt sollen projektive Räume und Unterräume eingeführt werden. Dabei kann im Falle einer projektiven Ebene in Gestalt von Schnitten mit Ebenen immer zu einer ebenen affinen Inzidenzgeometrie übergeleitet werden:

Definition 1

(a) Zu einem K-Vektorraum V ist $\mathbb{P}_K(V)=\{$eindimensionale Untervektorräume von V$\}$ $=\{\langle v\rangle_K: 0\neq v\in V\}$ (d.h. die Menge der „Strahlen", also der Geraden durch 0) der zugehörige projektive Raum. Zur Schreibweise: $\mathbb{P}(V)$, falls K bekannt.

(b) Dabei ist $\mathbb{P}_K^n:=\mathbb{P}_K(K^{n+1})$ der n-dimensionale projektive Standardraum. Auch hier eine Vereinbarung zur Schreibweise: $\mathbb{P}^n:=\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.

(c) Die Elemente von $\mathbb{P}(V)$ heißen (projektive in Unterscheidung zu affinen) Punkte.

(d) Die Dimension von $\mathbb{P}(V)$ wird festgelegt als: $\dim_K(\mathbb{P}(V)) := \dim(\mathbb{P}(V)) = \dim V - 1$, wobei Voraussetzung ist, dass die Dimension von V endlich ist.

(e) Sei M Teilmenge von $\mathbb{P}(V)$. M ist also eine Menge von „Strahlen“ d.h. Geraden durch 0, wobei jeder Strahl für sich eine Menge ist. M heißt projektiver Unterraum, wenn mit $U(M) := \bigcup_{p \in M} p$ gilt: U(M) ist Untervektorraum. Ist dies der Fall, dann ist $\dim M := \dim U(M) - 1$.

(f) Sei M projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$. Dann ist M:

- projektive Gerade, wenn $\dim M = 1$
- projektive Ebene, wenn $\dim M = 2$
- projektive Hyperebene, wenn $\dim \mathbb{P}(V) = n$ und $\dim M = n - 1$.

Beobachtung 2

Projektive Unterräume sind projektive Räume.

Beweis

Sei P projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$. Es ist $P = \mathbb{P}(U(P))$ mit $U(P) = \bigcup_{p \in P} p$.

Man nimmt also alle eindimensionalen Untervektorräume aus P, betrachtet sie als Punktmenge und vereinigt sie. Dann bilden sie nach Voraussetzung einen Vektorraum. Wenn man jetzt wieder alle eindimensionalen Unterräume nimmt, bekommt man genau die Punkte von $\mathbb{P}(V)$.

■

Beispiel und Bemerkungen 3

(a) Wenn $\dim V = 0$ (d.h. V besteht nur aus dem Nullpunkt), dann ist $\mathbb{P}(V) = \varnothing$ mit $\dim \varnothing = -1$.

Wenn $\dim V = 1$, dann ist $|\mathbb{P}(V)| = 1$, denn $\mathbb{P}(V) = \{V\}$ und die $\dim(\mathbb{P}(V)) = 0$. Dabei wird mit | | die Anzahl der Elemente bzw. die so genannte Mächtigkeit der Menge $\mathbb{P}(V)$ bezeichnet.

b) Reelle projektive Ebene

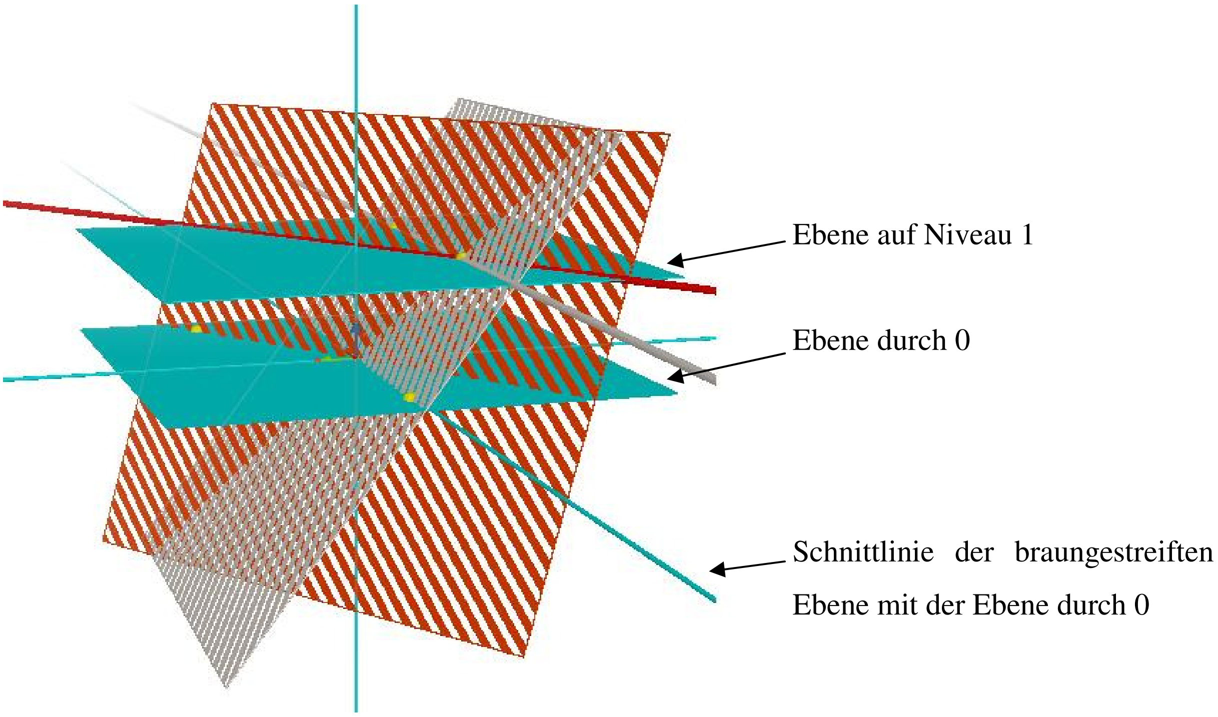
$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, wie in Definition 1 festgelegt.

Sei $G \subseteq \mathbb{P}^2$ eine projektive Gerade.

$U(G)$ ist eine Ebene durch 0 in $\mathbb{R}^3$, deren eindimensionale Untervektorräume die projektiven Punkte der projektiven Geraden G sind.

Dieses Beispiel ist einfach die Definition, heruntergeschraubt auf einen Spezialfall.

Visualisierung der Schnitte einer Ebene, die nicht durch 0 geht, mit Ebenen, die durch 0 gehen:

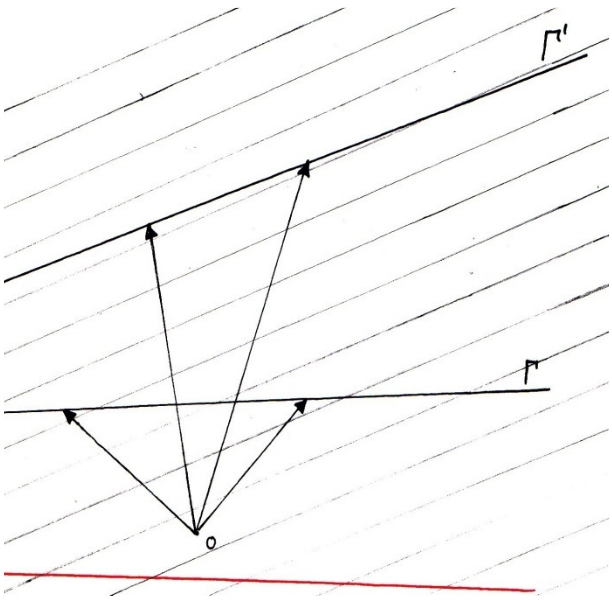


Jeder Strahl, mit einer Ausnahme, schneidet tatsächlich die braungestreifte Ebene. Es gibt natürlich auch Strahlen, die die Ebene nicht schneiden, nämlich jene, die parallel zur Ebene verlaufen.

Quintessenz der Zeichnung:

Wir haben eine projektive Ebene, darin eine projektive Gerade (Ebene im dreidimensionalen Raum). Eine Ebene, die 0 nicht enthält, schneidet alle Strahlen, außer denjenigen, die parallel verlaufen. So zum Beispiel die grüne Ebene auf Niveau 1. Ein kegelförmiges Objekt erzeugt eine Schnittmenge mit dieser Ebene und hinterlässt sozusagen eine Spur. Eine Ebene durch 0 hinterlässt zum Beispiel die Spur einer Geraden.

Eine (affine) Gerade Γ in $\mathbb{R}^3$, die nicht durch 0 geht, führt zu einer eindeutig durch Γ bestimmten projektiven Geraden: $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}})$, wobei $\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}}$ ein zweidimensionaler Unterraum ist. Jede weitere affine Gerade Γ' in $\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}}$ mit $0 \notin \Gamma'$ führt zur selben projektiven Geraden, denn $\langle\Gamma'\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}}$.



Wir haben eine Gerade Γ, die nicht durch 0 geht, im $\mathbb{R}^3$. Dann ist die Ebene, in der 0 und Γ liegen, ein zweidimensionaler Untervektorraum und damit ist diese Ebene eine projektive Gerade.
Jede weitere affine Gerade Γ‘ in dieser Ebene, die nicht durch 0 geht, führt zur selben projektiven Gerade.
Diese beiden Geraden sind auf dem roten „Bildschirm“ nicht zu unterscheiden.

<u>Inzidenzverhalten in projektiven Punkten und Geraden</u>

<u>Satz 4</u> **a)** Je zwei verschiedene projektive Punkte in $\mathbb{P}(V)$ liegen auf genau einer projektiven Geraden.

b) Sei dim $\mathbb{P}(V) = 2$. Dann gilt: Je zwei verschiedene projektive Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

c) Sei dim $\mathbb{P}(V) = n$. Dann gilt: Je zwei verschiedene Hyperebenen schneiden sich in genau einem projektiven Unterraum der Dimension n-2.

<u>Beweis</u> **a)** Seien p_1, p_2 ∈ $\mathbb{P}(V)$ projektive Punkte und verschieden, dann sind das eindimensionale Unterräume, etwa $p_1 = K \cdot u^{(1)}, p_2 = K \cdot u^{(2)}$ mit $p_1, p_2 \subseteq V$, $u^{(1)} \neq 0 \neq u^{(2)}$.

Dadurch, dass $Ku^{(1)}$ und $Ku^{(2)}$ verschieden und eindimensional sind, sind $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ linear unabhängig. Sei nun $U = \langle u^{(1)}, u^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}$, dies ist eine affine Ebene durch 0. Dann ist $\mathbb{P}(U)$ eine projektive Gerade, denn die Dimension ist 2. Und natürlich ist p_1 darin enthalten, denn $u^{(1)}$ liegt in U (das ist die Vereinigungsmenge aller eindimensionalen Unterräume), also liegt der von $u^{(1)}$ aufgespannte eindimensionale Unterraum darin und das ist ja gerade p_1. Analog gilt das auch für p_2, also kann man sagen: $p_i \in \mathbb{P}(U)$, i = 1, 2.
Jetzt geht es nur noch um die Eindeutigkeit.

Sei $\mathcal{P}$ projektive Gerade mit $p_i \in \mathcal{P}$, i=1,2. Dann ist zunächst nach Definition 1

$$\mathbf{U}(\mathcal{P}) = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{p}$$

ein zwei-dimensionaler Untervektorraum. Und da $p_i \in \mathcal{P}$, gilt: $u^{(i)} \in U(\mathcal{P})$, i = 1, 2.

Es folgt: $U(\mathcal{P}) = \langle u^{(1)}, u^{(2)} \rangle_K$ und dann $\mathcal{P} = \mathbb{P}(U)$.

b) Sei dim $\mathbb{P}(V) = 2$.

Zu zeigen: Je zwei verschiedene projektive Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweisskizze:

Nehmen wir an, wir haben eine projektive Ebene. Das heißt, wir sind im dreidimensionalen Vektorraum, dem Standardraum. Jetzt nehmen wir darin zwei Geraden, das heißt, wir nehmen zwei verschiedene Ebenen durch 0. Dann können diese schon nicht mehr parallel sein, weil beide durch 0 gehen. Satz 4 (b) bedeutet außerdem, dass je zwei verschiedene Ebenen durch 0 im $\mathbb{R}^3$ sich in einer Gerade durch 0 schneiden.

Formaler Beweis:

Beweis der Existenz

Seien $G_i = \mathbb{P}(U_i)$, i = 1, 2 zwei verschiedene projektive Geraden. Dann gilt per Definition: dim $U_i = 2$, i = 1, 2 und nach Voraussetzung $U_1 \neq U_2$.

Zwangsläufig ist dann dim $(U_1 \cap U_2) = 1$.

Sei $p = U_1 \cap U_2$ (und damit ein projektiver Punkt), dann ist $p \in \mathbb{P}(V)$, und $p \in G_i$, i = 1, 2. Dies ist so, weil p in $U_1 \cap U_2$ und damit in U_1 und U_2 liegt. Also existiert ein (projektiver) Schnittpunkt. (Damit ist die Existenz gezeigt.)

Beweis der Eindeutigkeit

Sei $q \in G_1 \cap G_2$ (also ein projektiver Punkt, der auf beiden Geraden liegt), etwa $q = \langle u \rangle_K$ mit $u \neq 0$ (also ist q ein Strahl durch 0). Aber es ist auch $u \in U_i$, i = 1, 2, also $u \in U_1 \cap U_2$, also q = p. □

Das Problem mit der projektiven Geometrie besteht nur darin, dass wir die vertrauten Objekte der linearen Algebra jetzt mit geometrischem Namen belegen. Wenn wir von Punkten reden, von Ebenen usw.

Es gibt zwei Rechtfertigungen dafür:

1) Die projektive Geometrie entwickelte sich aus der Problemstellung heraus, wie man dreidimensionale Objekte zweidimensional erfassen kann.

2) Man kann (beispielsweise am Satz von Desargues) sehen, dass man durch diese etwas allgemeinere Geometrie sehr gut etwas allgemeinere Zusammenhänge erfassen und zu einfacheren, durchsichtigeren Ergebnissen kommen kann. Dies ist einfacher als in der affinen Geometrie, weil man die ganzen Sonderfälle wie z.B. Parallelen nicht mehr hat.

Die projektive Geometrie hat sich als Hilfsmittel zur Untersuchung geometrischer Fragestellungen bewährt. Sie ist aus konkreten Bedürfnissen heraus entstanden und spielt heute beispielsweise im Design an Computern eine wichtige Rolle, es wurden etwa in der Autoindustrie ganz neue Software-Pakete entwickelt, die mit projektiver ebener Geometrie arbeiten.

Bildnachweis

S. 3, Holzschnitt: www.math-inf.uni-greifswald.de/sonstiges/flachsmeyer/duerer.pdf

S. 6: www.staff.uni-oldenburg.de/wiland.schmale/Modul_Goemetrie_WiSe_2009_2010/projektiv_affin.html