Geometrie – Ausarbeitung der Vorlesung vom 27.01.2010

Thema der Vorlesung: Das Dualitätsprinzip

In der letzten Vorlesungsstunde wurde der projektive Satz von Desargues behandelt und der Satz 8 (a) bewiesen. In der heutigen Vorlesungsstunde soll durch allgemeine Überlegungen im Rahmen der projektiven Geometrie gezeigt werden, dass man den Satz 8 (b) nicht mehr beweisen muss da sich dieser aus dem Prozess der Dualität in der projektiven Geometrie ergibt. Das Dualitätsprinzip soll an einigen Beispielen veranschaulicht und die Umkehrungen der Aussagen anhand dieser verdeutlicht werden.

Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie besagt im Wesentlichen, dass aus jedem gültigem Satz der projektiven Inzidenzgeometrie durch „Dualisierung" auf einen weiteren gültigen dualen Satz gefolgert werden kann. Man muss dafür nur „Gerade" durch „Punkt" und „Verbindungsgerade" durch „Schnittpunkt" ersetzten und umgekehrt. Der zu Satz 5 duale Satz ist folgender:

Satz 9: Sei G (V) die Menge der projektiven Geraden in einer projektiven Ebene P(V) im dreidimensionalen Raum. Dann ist (P^* (V), G^*(V), $\ni$) mit P^* (V) : = G (V) sowie G^* (V) : = P (V) eine ebene projektive Inzidenzgeometrie. Dabei bedeutet $\ni$ also: g inzident mit p wobei g$\in$ G (V) und p$\in$ P(V), genau dann wenn g $\ni$p.

Beweis:

Im Folgenden werden die Axiome A_1 , A_6 und A_7 aus Kapitel 0 für das Tripel (P^* (V), G^*(V), $\ni$) mit *[1] versehen. Dabei bleibt der Inhalt der Axiome gleich. Die einzige Differenz besteht darin dass die $^*-$*Geraden* die Punkte und die $^*-$*Punkte* die Geraden darstellen.

A_1^* : Zu je zwei verschiedenen $^*-$*Punkten* gibt es genau eine $^*-$*Gerade* auf der die beiden $^*-$*Punkte* liegen. Das besagt nichts anderes als, dass je zwei verschiedene projektive Geraden genau mit einem projektiven Punkt inzidieren (folglich existiert ein Schnittpunkt). Diese Aussage gilt unmittelbar aus Satz 4 (b).

---

[1] Das * wird oft in der Analysis für die Dualität oder in der Linearen Algebra für den Dualraum benutzt

A_6^*: Je zwei verschiede $^*-Geraden$ schneiden sich genau in einem $^*-Punkt$. Das besagt nichts anderes als, dass je zwei verschiedene projektive Punkte mit einer projektiven Geraden inzidieren. Diese Aussage gilt unmittelbar aus Satz 4 (a).

Es wird ersichtlich, dass die Axiome A_1^*, A_6^* bzw. A_1, A_6 sich somit unmittelbar entsprechen und das Verhalten von Punkten und Geraden absolut gleichwertig ist. Zu je zwei verschiedenen X gibt es genau ein Y, das mit beiden inzidiert. Dabei kann X Geraden und Y Punkte bedeuten oder umgekehrt.

A_7^* **:** Es gibt mindestens vier $^*-Punkte$ von denen keine drei kollinear sind. Das bedeutet, dass es mindestens vier projektive Geraden gibt, von denen keine drei kopunktal sind.

Zum Axiom A_7 fehlt jedoch das entsprechende Gegenstück. Wäre auch dies vorhanden, so wäre die Rolle von Punkten und Geraden absolut gleichwertig und es würde direkt Satz 9 gelten. Das zu A_7 duale Axiom für Geraden anstelle von Punkten lässt sich jedoch beweisen, wenn im projektiven Raum P(V) gezeigt werden kann, dass es mindestens 4 Geraden gibt, von denen keine drei kopunktal sind, d. h. keine drei mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren.

Nachweis von A_7^* **:**

In P(V) gibt es nach Satz 5 mindestens vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 von denen keine drei kollinear sind, d.h. keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Die Behauptung ist, dass von den folgenden vier Geraden $p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_3$, $p_3 \vee p_4$ und $p_4 \vee p_1$ keine drei mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren und die Geraden alle voneinander verschieden sind, da die p_i paarweise verschieden sind.

Beweis: Zunächst einmal existieren die Geraden nach Satz 4 (a) und die vier Geraden $p_1 \vee p_2$, $p_2 \vee p_3$, $p_3 \vee p_4$ und $p_4 \vee p_1$ sind voneinander verschieden, da die p_i paarweise verschieden sind. Weiterhin seien $p_i = \langle u_i \rangle$ eindimensionale Unterräume wobei $1 \leq i \leq 4$ mit $0 \neq u_i \in V$ gilt. Die zu den Verbindungsgeraden gehörigen Untervektorräume sind die folgenden Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum:

$$U_{12} = U(p_1 \vee p_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$$
$$U_{23} = U(p_2 \vee p_3) = \langle u_2, u_3 \rangle$$
$$U_{34} = U(p_3 \vee p_4) = \langle u_3, u_4 \rangle$$
$$U_{41} = U(p_4 \vee p_1) = \langle u_4, u_1 \rangle$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$\left.\begin{aligned} U_{12} \cap U_{23} &= \langle u_2 \rangle \\ U_{23} \cap U_{34} &= \langle u_3 \rangle \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wären jetzt $p_1 \vee p_2$, $p_2 \vee p_3$, $p_3 \vee p_4$ kopunktal, so müsste $U_{12} \cap U_{23} \cap U_{34}$ eine eindeutige Schnittgerade ergeben und daher eindimensional sein und es folgt mit (1), dass $\langle u_2 \rangle = \langle u_3 \rangle$ oder $p_2 = p_3$ ist und dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Dies gilt auch für die folgende Gerade:

$$\left.\begin{aligned} U_{23} \cap U_{34} &= \langle u_3 \rangle \\ U_{34} \cap U_{41} &= \langle u_4 \rangle \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wären jetzt $p_2 \vee p_3$, $p_3 \vee p_4$, $p_4 \vee p_1$ kopunktal, so müsste $U_{23} \cap U_{34} \cap U_{41}$ eindimensional sein und es folgt mit (2), dass $\langle u_3 \rangle = \langle u_4 \rangle$ oder $p_3 = p_4$ ist und dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Ganz analog für je weitere zwei Geraden.

Damit haben wir das zu A_7 duale Axiom A_7^* bewiesen. ■

Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie besagt im Wesentlichen:
Die Geometrie (P(V), G(V), $\in$) und (G(V), P(V), $\ni$) sind isomorph, d. h. es gibt Inzidenz - erhaltende bijektive Abbildungen

$$\left.\begin{aligned} \Pi &: P(V) \to G(V) \\ \gamma &: G(V) \to P(V) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\text{Spezialfall einer sogenannten Korrelation}}$$

Die Korrelation wurde in der Vorlesung nicht weiter behandelt. Weiterführende Literatur zur Vertiefung dazu gibt es beispielsweise ausführlich für beliebige Dimensionen in [F], nur für Ebenen aber anders in [KK] sowie im Kontext von „Polaritäten“ in der Literatur [A].

Eine Konsequenz des Dualitätsprinzips ist, dass zu jeder geometrischen Aussage in $(P^2, G^2, \in)$ eine duale Aussage gehört, wo „Punkt“ mit „Gerade“ und $\vee$ mit $\cap$, d. h. „Verbindungsraum“ mit „Durchschnitt“ ausgetauscht werden. Wenn dann eine der beiden Aussagen wahr ist, dann auch die Andere. Dies soll anhand der folgenden Beispiele 10 und 11 veranschaulicht werden.

Beispiel 10: Zum Dualitätsprinzip

Sie V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum und $G^2 = G(R^3)$ sowie $P^2 = P(R^3)$ mit den folgenden Abbildungen gegeben:

$$\Pi: \; P^2 \to G^2, \quad p \to P(U(p)^{\perp}) \overset{!}{\in} G^2$$

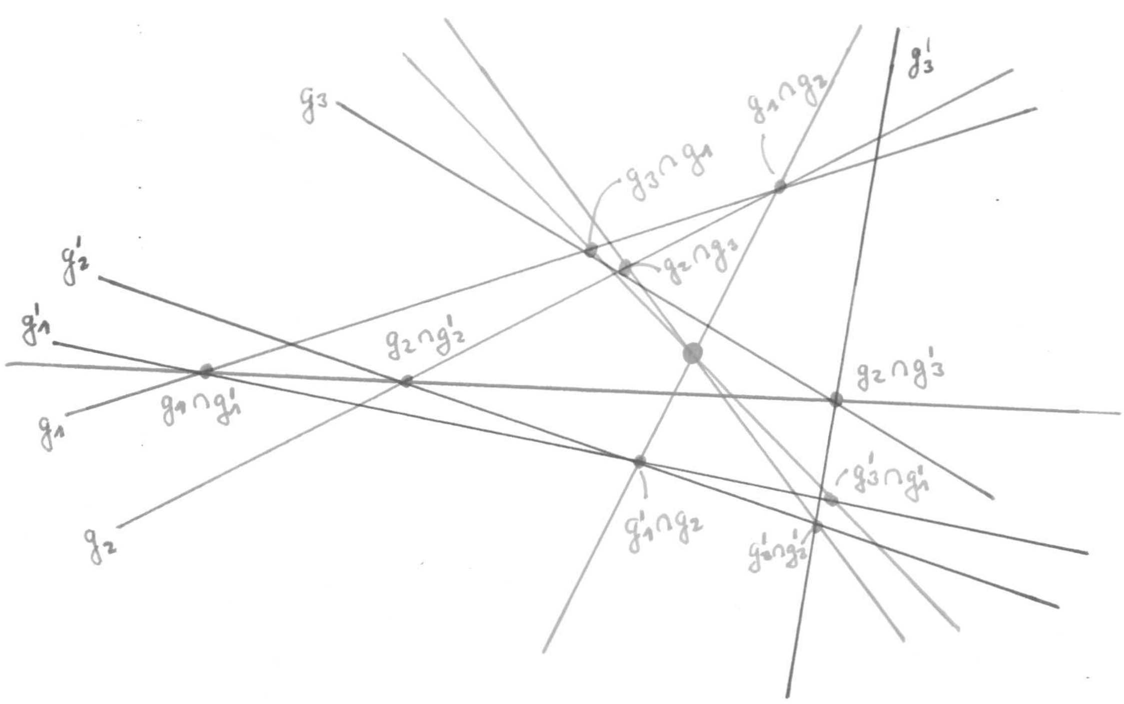
$$\gamma: \; G^2 \to P^2, \quad g \to P(U(g)^{\perp}) \overset{!}{\in} P^2$$

Π, γ sind Inzidenz - erhaltend: Für $p \in P^2, g \in G^2$ gilt:

$$p \underset{\in}{\underset{\downarrow}{I}} g \quad \Leftrightarrow \quad \Pi(p) \underset{\ni}{\underset{\downarrow}{I}} \gamma(g)$$

Beispiel 11: Dualisierung von Satz 8 (a) und (b)

Der duale Satz von 8 (a) ist der Satz 8 (b) und umgekehrt. Da der Satz 8 (a) schon behandelt wurden soll hier eine Skizze zu 8 (b) angefertigt werden.

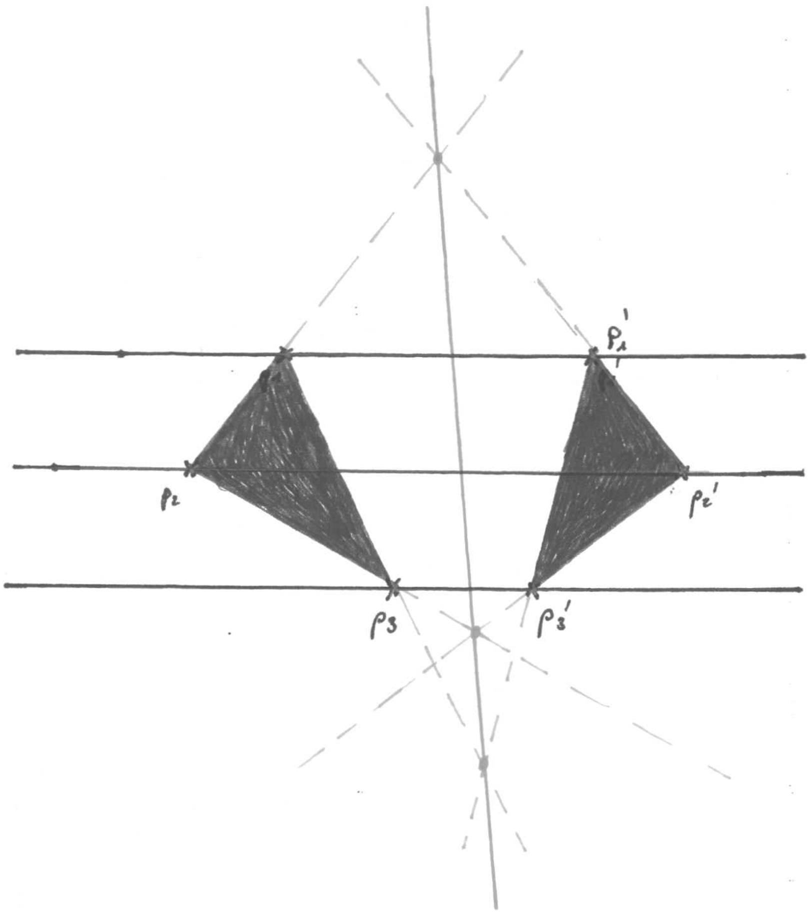


Es handelt sich bei jedem projektive Satz natürlich auch um eine affine Variante, allerdings eine, wo die Geraden keine Parallilitäten aufweisen. So hat der projektive Satz von Desargues auch verschiedene affine Varianten. Am Beispiel 12 wird eine solche affine Variante des Satzes von Desargues gezeigt.

Beispiel 12: Eine affine Variante von Satz 8 (a):

Seien p_1, p_2, p_3 und p_1', p_2', p_3' paarweise verschiedene Punkte im R² mit der Eigenschaft:

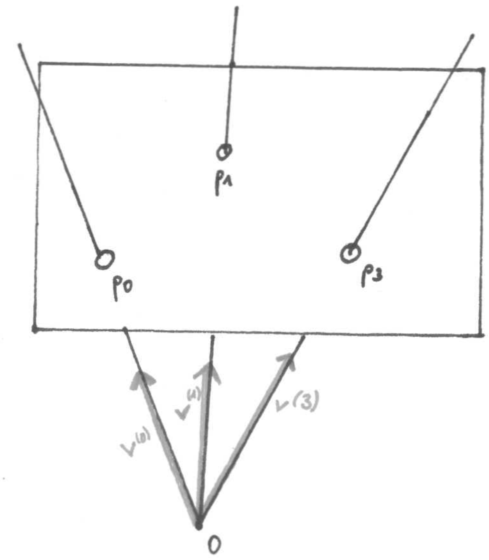
$p_1 \vee p_1'$, $p_2 \vee p_2'$, $p_3 \vee p_3'$ sind kopunktal und $p_i \vee p_i'$ parallel mit $1 \leq i \leq 3$. Dann sind die Schnittpunkte $(p_1 \vee p_2) \cap (p_1' \vee p_2')$, $(p_2 \vee p_3) \cap (p_2' \vee p_3')$ und $(p_3 \vee p_1) \cap (p_3' \vee p_1')$ kollinear.



§ 9 projektive Unabhängigkeit und Abbildungen

In diesem Kapitel wird es wie in der affinen analytischen Geometrie um Fragestellungen gehen wie bspw. Unabhängigkeiten, Koordinaten, Basen und Abbildungen im Zusammenhang mit projektiven Objekten. Im folgenden sei daher immer vorausgesetzt, dass K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit der Dimension n+1 und P(V) der zu V gehörende projektive Raum.

Definition 1: Die projektiven Punkte $p_0,\ldots,p_r$ in P(V) heißen projektiv unabhängig, wenn für eine Auswahl von Vektoren $v^{(i)}$ mit $p_i = \langle v^{(i)} \rangle$ gilt: $v^{(0)},\ldots,v^{(r)}$ sind K-linear unabhängig.



Beobachtung 2:

(a) „projektiv- unabhängig" ist wohldefiniert

(b) $p_0,\ldots,p_r$ projektiv unabhängig $\Leftrightarrow$ $\dim p_0 \vee \ldots \vee p_r = r$

Beweis: (a) Seien $p_0,\ldots.,p_r \in P(V)$ und $p_i \in w^{(i)}$, derart dass $p_i = < w^{(i)} >$ für $0 \le i \le r$. Dann gibt es $\lambda_i \in K \setminus \{0\}$ derart, dass $w^{(i)} = \lambda_i v^{(i)}$. Dann gilt:

$v^{(0)},\ldots.,v^{(v)}$ *linear unabhängig* $\Leftrightarrow$ $w^{(0)},\ldots.,w^{(v)}$ *linear unabhängig*

(b) Seien $p_i =< v^{(i)} >$ mit $0 \le i \le r$ dann gilt nach Definition 1 §9:

$p_0,\ldots.,p_r$ *projektiv unabhängig* $\Leftrightarrow$ $v^{(i)},\ldots,v^{(r)}$ *linear unabhängig*
$\Leftrightarrow \dim_K U(p_0 \vee \ldots \vee p_r) = n+1 \Leftrightarrow \dim p_0 \vee \ldots \vee p_r = r$

Dabei wurde benutzt, dass $p_0 \vee \ldots \vee p_r = \dim U(p_0 \vee \ldots \vee p_r) - 1$ (Definition 1(e) §8). Dann gilt $U(p_0,\ldots,p_r) =< v^{(0)},\ldots,v^{(r)} >_K$ ■

Definition 3: n+2 Punkte $p_0,\ldots,p_{n+1} \in P(V)$ heißen projektive Basis, wenn je n+1 davon projektiv unabhängig sind

Motivation: Sei n=2, der Punkt $p \in P_K^2$ und die Punkte p_0, p_1, p_2 projektiv unabhängig und sei mit geeigneten $v, v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}$: $p =< v >,\ p_0 = < v_0 >,\ p_1 =< v_1 >,\ p_2 =< v_2 >$.Wie könnte man den Punkt p durch Koordinaten darstellen?

Da p_0, p_1, p_2 projektiv unabhängig sind, bilden $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}$ eine Basis des K^3. Daher kann ein weiterer Vektor als Linearkombination der Basis $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}$ dargestellt werden $v = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i v^{(i)}$, aber auch als ein Vielfaches anderer Linearkombinationen von Vektoren aus den p_i: $v = \sum_{i=0}^{2} \mu_i (\alpha_i v^{(i)})$. Der projektive Punkt p lässt sich demnach durch die $v^{(i)}$ nicht eindeutig durch Koordinaten festlegen. Es wird ein zusätzlicher Referenzpunkt benötigt.