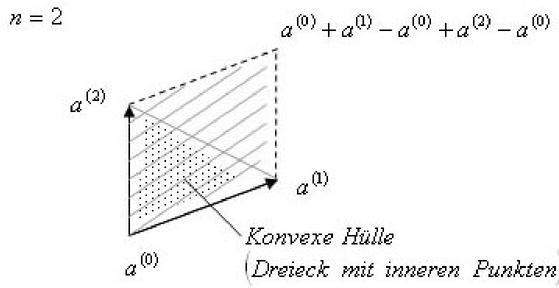
# Abschluss § 5

In diesem Paragraphen haben wir den Zusammenhang von elementaren Umformungen und Verschiebungen und deren geometrischer Bedeutung kennen gelernt. Zudem ging es um die Berechnung von Volumina. Zum Abschluss soll es noch ein paar Informationen zum orientierten Volumen eines Parallelflachs geben.

Seien $a^{(0)}, ..., a^{(n)}$ aus $\mathbb{R}^n$, dann ist durch die Menge $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a^{(i)} - a^{(0)}) : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ das ($n$-dimensionale) Parallelflach gegeben.

Die folgende Skizze veranschaulicht ein Parallelflach mit der Dimension $n = 2$. Dieses ist ein Parallelogramm.




**Formel zum orientierten Volumen eines Parallelflachs**
Das orientierte Volumen des oben angegebenen Parallelflachs der Dimension $n = 2$ lässt sich über $\frac{1}{2}det(a^{(1)} - a^{(0)}, a^{(2)} - a^{(0)})$ berechnen.

Betrachten wir nun Polytope im Allgmeinen, kommen wir zu der
**Regel zur Berechnung des orientierten Volumens eines Parallelflachs**
Das orientierte Volumen von $\mathcal{C}(a^{(0)}, ..., a^{(n)})$ ist $\frac{1}{n!}det(a^{(1)} - a^{(0)}, ..., a^{(n)} - a^{(0)})$.
Für affin unabhängige $a^{(i)}$ lässt sich somit das „Hypervolumen“ des $n$-Simplex berechnen.

Literaturhinweis: Dorst, Leo; Fontijne, Daniel; Mann, Stephen: Geometric algebra for computer sience: an object-oriented approach to geometry.

# § 6 Anfänge der euklidischen Elementargeometrie - insbesondere Dreiecksgeometrie

Als Hauptliteratur dient hier:

**KK:** Köcher, Max; Krieg, Aloys: Ebene Geometrie, Springer, 3. Auflage 2007, weiterer Nachdruck 2009.

weitere Literatur:

**A:** Audin, Michèle: Géométrie, Belin, 1999, englische Übersetzung: Geometry, Springer, 2003.

**B:** Berger, Marcel: Géométrie, 2-ème Edition, Vol. 1-5, Nathan, 1979, englische Übersetzung: Geometry, Springer, 1987 in zwei Bänden.

**K:** Knörrer, Horst: Geometrie. Ein Lehrbuch für Mathematik- und Physikstudierende, 2. Auflage, Vieweg 2006.

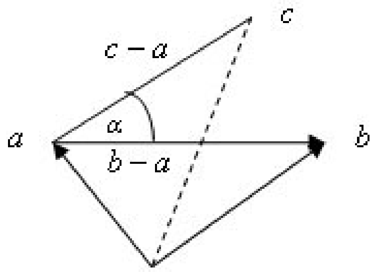
Zunächst eine kleine Wiederholung zum Thema **„Was ist ein Dreieck?"**
Wir haben folgende zwei Versionen für die Angabe von Dreiecken kennen gelernt:

- Version „Tripel": Seien $a, b, c$ aus $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$. Außerdem wird im Allgemeinen vorausgesetzt, dass $a, b, c$ nicht kollinear sind. Dann sind die Dreiecksseiten: $a \vee b$, $b \vee c$ und $c \vee a$.
  Bei dieser Darstellung können über die Geraden auch Punkte außerhalb des Dreiecks erreicht werden (z. B. Höhenschnittpunkte o. ä.).

- Version „Punktmenge": Seien $a, b, c$ aus $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$, dann lässt sich das Dreieck mit Hilfe der konvexen Hülle $\mathcal{C}(a, b, c)$ beschreiben.
  Dies ist vor allem dann nützlich, wenn es z. B. um eine Unterscheidung von „Innen" und „Außen" (also die Lage eines Punktes innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks) geht.

Im Folgenden findet vorwiegend die „Tripel-Version" zur Beschreibung von Dreiecken Verwendung. Außerdem betrachten wir hauptsächlich den Fall $n = 2$.

**Satz 1 - Satz über die Winkelsumme**
(Bemerkung: Zentrales Axiom der synthetischen Geometrie)
Seien $a, b, c$ aus $\mathbb{R}^2$ nicht kollinear. Für $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ mit
$\|b - a\| \cdot \|c - a\| \cdot cos\alpha = ((b - c, c - a))$,
$\|c - b\| \cdot \|a - b\| \cdot cos\beta = ((c - b, a - b))$,
$\|a - c\| \cdot \|b - c\| \cdot cos\gamma = ((a - c, b - c))$
gilt: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.




Für den Beweis benötigen wir folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz 2**
Für $x, y \in \mathbb{R}^2_{\neq 0}$ und $\varphi = \sphericalangle(x, y)$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ gilt

**(i)** $((x, y))^2 + det(x, y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$

**(ii)** $\|x\| \cdot \|y\| \cdot sin\varphi = \mid det(x, y) \mid$

Der Beweis des Hilfssatzes folgt weiter unten. Zunächst beweisen wir mit seiner Hilfe den Satz 1 über die Winkelsumme.

**Beweis von Satz 1**
Mit den Voraussetzungen des Satzes sind $a, b, c$ aus $\mathbb{R}^2$ nicht kollinear und $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$. Außerdem ist nach dem Hilfssatz (ii) $sin\alpha = \frac{|det(b-a,c-a)|}{\|b-a\| \cdot \|c-a\|}$ $(*)$ und $sin\beta = \frac{|det(c-b,c-b)|}{\|c-b\| \cdot \|a-b\|}$ $(**)$ . Mit den gegebenen Voraussetzungen und den Additionstheoremen für *sinus* und *cosinus* lässt sich die Aussage über die Winkel in zwei Schritten zeigen. Dafür betrachten wir zunächst die *cosinus*-Funktion, im Anschluss die Funktion des *sinus*.

Für den *cosinus* gilt nach der Analysis folgendes Additionstheorem:
$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$[1].

[1] Vgl.: Bronstein, I. N.; et al: Taschenbuch der Mathematik, Seite 80, Kapitel 2.7.2.2., wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 6. vollständig überarbeitete und ergänzte Auflage, Frankfurt am Main 2005

Mit $(*)$ und $(**)$ sowie Hilfssatz 2(ii) ergibt dies:

$$cos(\alpha+\beta) = \frac{((b-a, c-a)) \cdot ((c-b, a-b))}{\|b-a\| \cdot \|c-a\| \cdot \|c-b\| \cdot \|a-b\|} - \frac{\mid det(b-a, c-a) \mid \cdot \mid det(c-b, a-b) \mid}{\|b-a\| \cdot \|c-a\| \cdot \|c-b\| \cdot \|a-b\|}$$

$$mit\ \widetilde{b} := b-a,\ \widetilde{c} := c-a,\ \widetilde{a} := a-a = 0$$

$$= \frac{((\widetilde{b}, \widetilde{c})) \cdot \overbrace{((\widetilde{c}-\widetilde{b}, \widetilde{b}))}^{(1)} - \overbrace{\mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot \mid det(\widetilde{c}-\widetilde{b}, -\widetilde{b}) \mid}^{(2)}}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|}$$

$(1)\ lässt\ sich\ auf\ Grund\ der\ Bilinearität\ wie\ folgt\ umformen:$

$$((\widetilde{c}-\widetilde{b}, -\widetilde{b})) = \|\widetilde{b}\|^2 - ((\widetilde{c}, \widetilde{b}))$$

$Die\ Beträge\ in\ (2)\ lassen\ sich\ nach\ Umformung\ der\ Matrix$
$(Subtrahieren\ der\ 2.\ Spalte\ von\ der\ 1.\ Spalte\ sowie\ Spalten-$
$vertauschung\ in\ der\ zweiten\ Determinante)\ folgendermaßen$
$zusammenfassen:$

$$\mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot \mid det(\widetilde{c}-\widetilde{b}, -\widetilde{b}) \mid = \mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot \mid det(\widetilde{c}, -\widetilde{b}) \mid = det(\widetilde{b}, \widetilde{c})^2$$

$$\overset{nach\ 2(i)}{=} \|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\|^2 - ((\widetilde{b}, \widetilde{c}))^2$$

$$= \frac{((\widetilde{b}, \widetilde{c})) \cdot \|\widetilde{b}\|^2 - \|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\|^2}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} = \frac{((\widetilde{b}, \widetilde{c})) - \|\widetilde{c}\|^2}{\|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} = \frac{((\widetilde{b}-\widetilde{c}, \widetilde{c}))}{\|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|}$$

$$= \frac{((b-c, c-a))}{\|c-a\| \cdot \|c-b\|}$$

$$= -cos\gamma$$

$$= cos(\pi-\gamma)$$

Ähnlich erhält man $sin(\alpha+\beta) = sin(\pi-\gamma)$:

$$
\begin{aligned}
sin(\alpha+\beta) &= sin\alpha \cdot cos\beta + sin\beta \cdot cos\alpha \\
&= \frac{\mid det(b-a, c-a) \mid}{\|b-a\| \cdot \|c-a\|} \cdot \frac{((c-b, a-b))}{\|c-b\| \cdot \|a-b\|} + \frac{\mid det(c-b, a-b) \mid}{\|c-b\| \cdot \|a-b\|} \cdot \frac{((b-a, c-a))}{\|b-a\| \cdot \|c-a\|} \\
&\quad mit\ \widetilde{b} := b-a,\ \widetilde{c} := c-a,\ \widetilde{a} := a-a = 0 \\
&= \frac{\mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot((\widetilde{c}-\widetilde{b}, -\widetilde{b})) + \mid det(\widetilde{c}-\widetilde{b}, -\widetilde{b}) \mid \cdot((\widetilde{b}, \widetilde{c}))}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} \\
&= \frac{\mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot[\|\widetilde{b}\|^2 - ((\widetilde{c}, \widetilde{b}))] + \mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot((\widetilde{b}, \widetilde{c}))}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} \\
&= \frac{\mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot[\|\widetilde{b}\|^2 - ((\widetilde{c}, \widetilde{b})) + ((\widetilde{b}, \widetilde{c}))]}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} \\
&= \frac{\mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid \cdot[\|\widetilde{b}\|^2 - ((\widetilde{b}, \widetilde{c})) + ((\widetilde{b}, \widetilde{c}))]}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} \\
&= \frac{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \mid det(\widetilde{b}, \widetilde{c}) \mid}{\|\widetilde{b}\|^2 \cdot \|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} = \frac{\mid det(\widetilde{c}, -\widetilde{b}) \mid}{\|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} \\
&= \frac{\mid det(\widetilde{c}, \widetilde{c}-\widetilde{b}) \mid}{\|\widetilde{c}\| \cdot \|\widetilde{c}-\widetilde{b}\|} \\
&= \frac{\mid det(c-a, c-b) \mid}{\|c-a\| \cdot \|c-b\|} = \frac{\mid det(a-c, b-c) \mid}{\|a-c\| \cdot \|b-c\|} \\
&= sin\gamma \\
&= sin(\pi-\gamma)
\end{aligned}
$$

Da $0 \leq \alpha+\gamma \leq 2\pi$ und $0 \leq \pi-\gamma\ (\leq \pi)\ < 2\pi$ ist durch *cosinus* und *sinus* der Winkel eindeutig bestimmt. Betrachtet man nur die *sinus*- oder *cosinus*-Funktion, kann diese jeweils an mehr als einer Stelle den gleichen Wert annehmen, damit gäbe es aber zwei Möglichkeiten für den gesuchten Winkel. Da wir aber beide Gleichungen betrachten, ist der Winkel mit den gegebenen Voraussetzungen eindeutig. Es folgt $\alpha+\beta = \pi-\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi$.

**Beweis des Hilfssatzes**

**(i)** Zu zeigen ist $((x,y))^2 + det(x,y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$. Dabei sind $x, y$ aus $\mathbb{R}^2_{\neq 0}$. Nachrechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ergibt:

$$\begin{aligned}
((x,y))^2 + det(x,y)^2 &= (( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} ))^2 + det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}^2 \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\
&= x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\
&= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
&= (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) \\
&= (( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} )) \cdot (( \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} )) \\
&= ((x,x)) \cdot ((y,y)) \\
&= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2
\end{aligned}$$

**(ii)** Wenn $x = y$, ist (ii) trivial. Sei jetzt $x, y \neq 0$ vorausgesetzt. Dann lässt sich die Aussage von (i) folgendermaßen umformen:
$((x,y))^2 + det(x,y)^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow \underbrace{(\frac{((x,y))}{\|x\| \cdot \|y\|})^2}_{(cos\varphi)^2} + (\frac{det(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|})^2 = 1.$

Dabei ist - wie gekennzeichnet - $(\frac{((x,y))}{\|x\|\cdot\|y\|})^2 = (cos\varphi)^2$ nach der Definition des *cosinus*, mit $\varphi = \sphericalangle(x,y)$.
Die Abbildung $\varphi \mapsto \begin{bmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \end{bmatrix}$ ist auf $[0, 2\pi)$ bijektiv mit dem Bildbereich $\{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$.
Da $cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$, folgt dann $(\frac{|det(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|})^2 = (sin\varphi)^2$. Dies lässt sich in den gesuchten Ausdruck umformen, da $sin\varphi \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$:
$(\frac{|det(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|})^2 = (sin\varphi)^2 \;\Rightarrow\; sin\varphi = \frac{|det(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|} \;\Leftrightarrow\; \|x\| \cdot \|y\| \cdot sin\varphi =| det(x,y) |.$

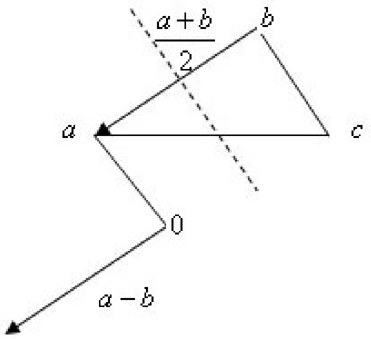
Ein paar besondere Punkte und Geraden bei Dreiecken:

**Definition 3**
Seien $a, b, c$ aus $\mathbb{R}^2$ nicht kollinear.

**(i)** $z = \frac{1}{3}(a + b + c)$ heißt <u>Schwerpunkt</u>.

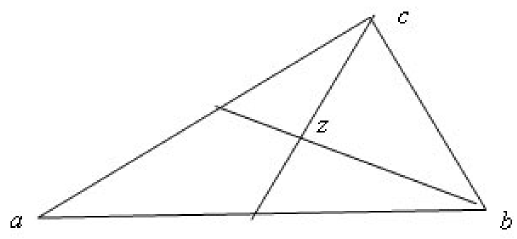
**(ii)** $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ sind die <u>Seitenmittelpunkte</u>, $S_c = c \vee \frac{a+b}{2}$, $S_a = a \vee \frac{b+c}{2}$, $S_b = b \vee \frac{c+a}{2}$ sind die <u>Seitenhalbierenden</u>,

**(iii)** $M_{ab} = M_{ba} = \frac{a+b}{2} + (a-b)^{\perp}$,
$M_{bc} = M_{cb} = \frac{b+c}{2} + (b-c)^{\perp}$,
$M_{ac} = M_{ca} = \frac{c+a}{2} + (c-a)^{\perp}$ sind die <u>Mittelsenkrechten</u>
(wobei beispielsweise $(a-b)^{\perp}$ der Orthogonalraum des Vektors $(a-b)$ ist, und die anderen angegebenen Orthogonalräume entsprechend den jeweiligen Vektoren zugeordnet werden),




**(iv)** und $H_a = a + (b-c)^{\perp}$, $H_b = b + (c-a)^{\perp}$, $H_c = c + (a-b)^{\perp}$ sind die <u>Höhen</u> des Dreiecks $a, b, c$.

**Satz 4**
Die Seitenhalbierenden sind kopunktal mit eindeutigem Schnittpunkt $z$ aus Definition 3(i) und es gilt: $TV(a, \frac{b+c}{2}, z) = TV(b, \frac{c+a}{2}, z) = TV(c, \frac{b+a}{2}, z) = \frac{2}{3}$.




$z = \frac{1}{3}(a+b+c)$

**Beweis**
Es ist $z = \frac{1}{3}(a+b+c)$ und durch Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ &= a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} \cdot \frac{(b+c)}{2} \\ &= a + \frac{2}{3}(\frac{(b+c)}{2} - a) \end{aligned}$$

$z$ lässt sich also darstellen als $z = a + \frac{2}{3}(\frac{b+c}{2} - a)$. Daran lässt sich ablesen, dass $z$ auf $S_a$ liegt und nach Definition 12 in §2 gilt außerdem $TV(a, \frac{b+c}{2}, z) = \frac{2}{3}$. Analog lässt sich zeigen, dass $z$ auf $S_b$ und $S_c$ liegt, denn es ist auch $z = b + \frac{2}{3}(\frac{a+c}{2} - b)$ und damit liegt $z$ auf $S_b$ und es gilt $TV(b, \frac{c+a}{2}, z) = \frac{2}{3}$, sowie $z = c + \frac{2}{3}(\frac{a+b}{2} - c)$ und damit liegt $z$ ebenso auf $S_c$ und es gilt $TV(c, \frac{b+a}{2}, z) = \frac{2}{3}$.
Es folgt insbesondere $z \in S_a \cap S_b \cap S_c$, denn $z$ ist in allen Seitenhalbierenden enthalten und muss damit auch in dem Schnitt der Seitenhalbierenden liegen, also gemeinsamer Punkt der drei Geraden sein. Da $a, b, c$ nicht kollinear sind, sind die Richtungsvektoren der Seitenhalbierenden linear unabhängig. Daher gibt es nur einen Schnittpunkt.

**Satz 5**

**(a)** Die Mittelsenkrechten sind kopunktal mit einem eindeutigen Schnittpunkt. Wir bezeichnen diesen mit $m$.

**(b)** Es gilt: $\|m-a\| = \|m-b\| = \|m-c\|$, $m$ ist der so genannte Umkreismittelpunkt (mehr zum Umkreis in einer folgenden Vorlesung).

**Beweis**

**(a)** Eine Normalenform für $M_{ab}$ ist $M_{ab} = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, b-a)) = ((\frac{a+b}{2}, b-a))\}$. Denn, nach Definition 3 ist $M_{ab} = \frac{a+b}{2} + (a-b)^\perp$ und dies entspricht der Darstellung eines affinen Unterraumes. Es ist dann $\Gamma^\perp = ((a-b)^\perp)^\perp$. Damit ist $(a-b)$ die Basis des Untervektorraumes, der senkrecht auf $\Gamma$ steht. Beobachtung 1 in §4 liefert dann die angegebene Normalenform.
Analog ist eine Normalenform für $M_{bc}$ und $M_{ac}$ gegeben durch
$M_{bc} = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, c-b)) = ((\frac{b+c}{2}, c-b))\}$ bzw.
$M_{ac} = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, a-c)) = ((\frac{a+c}{2}, a-c))\}$.
Nach den Rechenregeln zur Berechnung des Standardskalarprodukts aus Kapitel 2

§ 4 gilt hier $((a+b, b-a)) = \|b\|^2 - \|a\|^2$ und entsprechend $((b+c, c-b)) = \|c\|^2 - \|b\|^2$ und $((c+a, a-c)) = \|a\|^2 - \|c\|^2$. Je zwei Mittelsenkrechten schneiden sich in genau einem Punkt. Denn, gehen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, dass $M_{ab}$ und $M_{bc}$ keinen Schnittpunkt haben, dann folgt automatisch, dass die beiden Mittelsenkrechten in $\mathbb{R}^2$ parallel sind. Ihre verschobenen Untervektorräume wären somit gleich. Das bedeutet in diesem Fall $(a-b)^\perp = (b-c)^\perp$ und insbesondere sind dann $(a-b)$ und $(b-c)$ linear unabhängig und damit $a, b, c$ affin abhängig. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.
Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{R}^2$ können aber auch nicht mehr als einen Schnittpunkt haben (Die zwei Geraden sind zwei affine Unterräume, deren Schnitt immer auch ein affiner Unterraum ist. Schneiden sie sich in mehr als einem Punkt, ist die Dimension $\geq 1$. Da die Dimension der Geraden 1 ist, kann der Schnitt keine höhere Dimension haben, sondern wäre dann die ganze Gerade, heißt die Geraden wären identisch). Somit schneiden sich die Mittelsenkrechten also in genau einem Punkt. Diesen Punkt - der gemeinsame Punkt der Geraden und damit Element der Schnittmenge ist - bezeichnen wir, wie oben angegeben, mit $m$.
Ist also $\{m\} = M_{ab} \cap M_{bc}$, dann gilt:
$((m, b-a)) = \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2)$ und $((m, c-b)) = \frac{1}{2}(\|c\|^2 - \|b\|^2)$.
Die Summierung ergibt (auf Grund von Bilinearität):

$$\begin{aligned} ((m, b-a)) + ((m, c-b)) &= ((m, b)) - ((m, a)) + ((m, c)) - ((m, b)) \\ &= ((m, c)) - ((m, a)) \\ &= ((m, c-a)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2) + \frac{1}{2}(\|c\|^2 - \|b\|^2) &= \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|c\|^2 - \|a\|^2). \end{aligned}$$

Es folgt $((m, c-a)) = \frac{1}{2}(\|c\|^2 - \|a\|^2)$. $m$ liegt also auch auf der dritten Mittelsenkrechten; es gilt also $m \in M_{ca}$!

**(b)** Um die Gleichheit der Längen zu zeigen, berechnen wir die Differenz zweier Längen. Ist diese Null, müssen die Längen gleich sein. Zur einfacheren Rechnung bzw. Rechnung mit Skalarprodukten, betrachten wir ohne Beschränkung der Allgmeinheit die Quadrate:

$$
\begin{aligned}
\|m-a\|^2 - \|m-b\|^2 &= ((m-a, m-a)) - ((m-b, m-b)) \\
&= ((m-a, m)) + ((m-a, -a)) - ((m-b, m)) - ((m-b, -b)) \\
&= ((m, m)) - ((a, m)) - ((a, m)) + ((a, a)) \\
&\qquad - ((m, m)) + ((b, m)) + ((m, b)) - ((b, b)) \\
&= -2((m, a)) + 2((m, b)) + \|a\|^2 - \|b\|^2 \\
&= 2 \underbrace{((m, b-a))}_{\textit{nach (a) gilt } ((m,b-a)) = \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2)} - (\|b\|^2 - \|a\|^2) \\
&= 2 \cdot [\frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2)] - (\|b\|^2 - \|a\|^2) \\
&= (\|b\|^2 - \|a\|^2) - (\|b\|^2 - \|a\|^2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Über die zyklische Vertauschung der Bezeichnungen, erhält man ebenso die Gleichheit der anderen Längen. Damit ist insgesamt die Längengleichheit gezeigt.

**Satz 6**
Die Höhen sind kopunktal mit eindeutigem Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt wird mit $h$ bezeichnet.

**Beweis**
Eine Normalenform für $H_a$ ist: $H_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, b-c)) = ((a, b-c))\}$ (Diese erhält man ähnlich wie im Beweis von Satz 5(a) angegeben, über die Informationen in Definition 3 in §6 und Beobachtung 1 in §4). Analog lässt sich auch die Normalenform der anderen Höhen angeben:
$H_b = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, c-a)) = ((b, c-a))\}$ und $H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, a-b)) = ((c, a-b))\}$.
Wie bei Satz 5(a) lässt sich zeigen, dass je zwei Höhen genau einen Schnittpunkt haben. Es bleibt zu zeigen, dass dieser Schnittpunkt auch auf der dritten Höhe liegt, also: $H_a \cap H_b \subseteq H_c$.
Die Addition der entsprechenden Bedingungen von $H_a$ und $H_b$ ergibt: $((x, b-a)) = ((a, b-c)) + ((b, c-a)) = ((c, b-a))$ und damit erhalten wir die entsprechende Bedingung von $H_c$.
Es folgt also: $x \in H_a \cap H_b \Rightarrow x \in H_c$ mit $H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : ((x, a-b)) = ((c, a-b))\}$.