Vorlesungsausarbeitung zum Modul
Geometrie vom 04. Nov. 2009

4P

Verfasser: Anne Bornhorst

Einordnung der Vorlesung vom 04. Nov. '09

Die 5. Vorlesung vom 04. November fällt unter das 1. Kapitel der affinen analytischen Geometrie.
Die analytische Geometrie ist offen für Berechnungen und flexibel für Anwendungen (z.B. für einen Computereinsatz), da sie geometrische Objekte, Eigenschaften und Operationen mit analytischen Mitteln, d.h. unter Verwendung von Zahlen, analytischen Ausdrucken (z.B. Gleichungen) bis hin zu numerischen Rechnungen beschreibt.
Zur Einführung zur affinen analytischen Geometrie wurde in der vorausgegangenen Vorlesung die Definition eines affinen Unterraumes eines Vektorraumes wiederholt. Darüber hinaus war auch der Verbindungsraum zweier aUR-e eines Vektorraumes V über einen Körper K Bestandteil der Vorlesung, dem anschließend die Definition der affinen Hülle folgte.
Die Vorlesung endete mit dem Satz 1 Charakterisierungen aUR-e und dem anschließenden Beweis.

2. Vorlesungsinhalte

Zu Beginn der Vorlesung wurde Satz 1 zur geometrischen Charakterisierung aUR-e wiederholt.

Satz 1: Charakterisierung aUR-e eines VR-s
Seien V K-VR, $\dim_K V = n < \infty$, Γ eine nicht leere Teilmenge von V und Char $K \neq 2$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(a) Γ ist a UR

(b) $\Gamma = Lös(L, b) = \{a \in V : L(a) = b\}$ mit Endomorphismus L von V und $b \in V$

Speziell: $V = K^{n \times 1}$: $\Gamma = Lös(A, b)$ mit $A \in K^{n \times n}$, $b \in K^{n \times 1}$

„Γ ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems"

(c) Γ abgeschlossen bzgl. der Verbindungsgeraden d.h. $\forall a, b \in \Gamma : a \neq b \Rightarrow a \vee b \subseteq \Gamma$

Die in dem Satz 1 geforderte Bedingung $\mathrm{Char}\, K \neq 2$ wird in der nachfolgenden Bemerkung nicht mehr benötigt, denn es reicht auch stattdessen vorauszusetzen, dass K mindestens 3 Elemente enthält.

Bemerkung

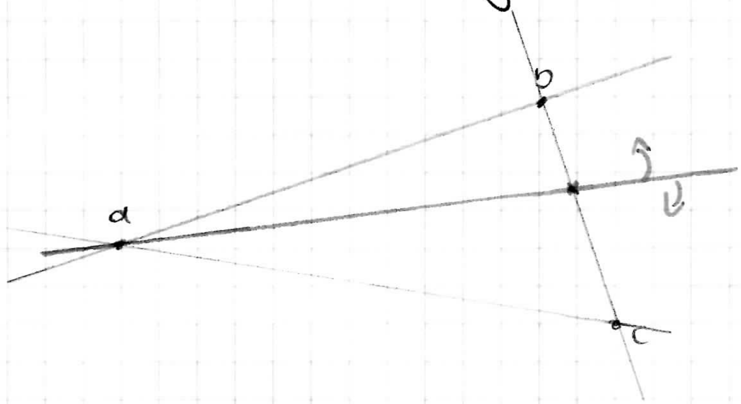
Satz 1 gilt auch unter der Voraussetzung $|K| \geq 3$ mit anderem Beweis

Erinnerung: $\overline{\Pi}^{aff}$

Satz 1c) ermöglicht konstruktiven Aufbau für $\overline{\Pi}^{aff}$.

Beispiel

i) $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ nicht auf einer Geraden



Konstruktion der affinen Hülle:

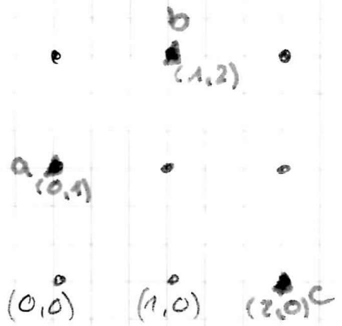
$\Pi = \{a, b, c\}$

$\overline{\Pi}^{aff} = \mathbb{R}^2$

Mit diesem Beispiel findet eine Konstruktion der affinen Hülle statt. Hierzu bildet man zunächst die Verbindungsgeraden $a \vee b$, $a \vee c$, und $b \vee c$. Da die ~~Verbindungsgeraden~~ affine Hülle abgeschlossen (sein soll) gemäß Satz 1 (c), ~~Kapitel 1~~ sind, ~~existieren~~ müssen z.B. auch ~~z.B.~~ auf der zu Punkten

Verbindungsgerade $b \vee c$ ~~zusätzliche Punkte, mit denen auch eine~~ Verbindungsgeraden existieren mit weiteren Punkten auf $a \vee c$ oder $a \vee b$. Diese zusätzlichen Verbindungsgeraden (dargestellt durch grüne Gerade) liegen auch in der affinen Hülle. Somit kommt man zu dem Ergebnis, dass $\overline{\Pi}^{aff} = \mathbb{R}^2$ ist.

ii) $(\mathbb{Z}_3)^2$



Sind a, b, c auf einer Geraden?
Wenn ja: suche einen Punkt außerhalb $a \vee c$ und bilde Verbindungsgerade

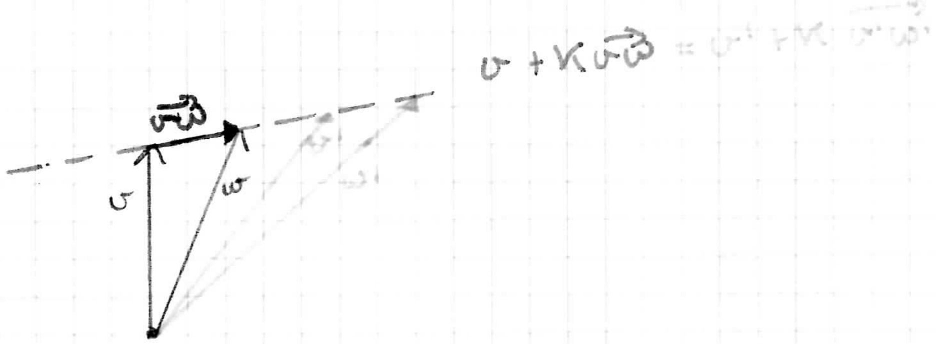
Bei diesem Beispiel bilden die drei Punkte $a, b, c \in (\mathbb{Z}_3)^2$ schon die affine Hülle.
Die Gerade $\binom{0}{1} + \mathbb{Z}_3 \binom{1}{1}$ bildet die affine Hülle.

Eine Schreibweise

$v, w \in V \qquad v \neq w$

Der Verbindungsvektor ist dann wie folgt definiert: $\vec{vw} = w - v$

Skizze: Sei „0" der Bezugspunkt



In diesem Beispiel möchte man den Verschiebungs-vektor $\vec{vw}$ betrachten, d.h. es ist nur relevant, was zwischen den Vektoren v und w passiert. Die dazugehörige Verbindungsgerade kann dargestellt werden mit $v + k\vec{vw}$. Diese kann jedoch auch mit beliebig anderen Vektoren (hier v' und w') erreicht werden. Die dazugehörige Verbindungsgeradengleichung muss dann aber angepasst werden mit $v' + k\vec{v'w'}$

„Abstrakte" affine Räume

Literaturhinweis:

[A] Audin, Michèle : Geometrie

[F] Fischer, Gerd : Analytische Geometrie

V ist K - VR ; $\dim V = n < \infty$ (vorerst nicht nötig)

Definition 2 : Allgemeiner affiner Raum

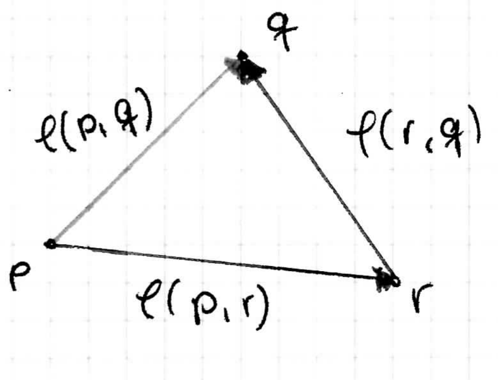
Sei $X \neq \emptyset$, U K-VR, $\ell : X \times X \to U$ Abbildung
(X, V, ℓ) oder kurz X heißt affiner Raum (aR) wenn gilt:

(A1) $\forall_{p \in X}$ $\ell(p, \cdot)$ ist bijektiv

(A2) $\forall_{p,q,r \in X}$ $\ell(p,q) = \ell(p,r) + \ell(r,q)$

(Dreiecksregel / Kräftesumme)

Skizze zu A2



$\ell(p,q) = \ell(p,r) + \ell(r,q)$

* Auch die leere Menge wird als aR bezeichnet
* Die Dimension $\dim_K X$ des aR-s X ist $\dim_K V$
* $p \in X$ heißt ~~gt~~ Punkt und $f(p,q)$ Verbindungs- oder Verschiebungsvektor $f(p,q) = \overrightarrow{pq}$

Erste Regeln

1) $\overrightarrow{pp} = 0$ 2) $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$

3) $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$

zu den ersten Regeln

1) sei $p \in X$: $\overrightarrow{pp} = f(p,p) \in V$

$$\overset{(A2)}{=} f(p,p) + f(p,p)$$

$$= 0$$

Diese Regel besagt, dass der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{pp} = 0$ ist. Dies folgt sofort aus der Definition des additiven neutralen Elements. Demnach bildet $f(p,p)$ das additive neutrale Element, welches Null ist.

Beweis der 2. Regel:

zz: $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$

$$\underbrace{\overrightarrow{pp}}_{=0} \underset{(A2)}{=} \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp}$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{qp}$ bildet das additive Inverse zu $\overrightarrow{pq}$

zu der 3. Regel:

zz: $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \Leftrightarrow \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$

„$\Rightarrow$": $\overrightarrow{pr} \underset{(A2)}{=} \underbrace{\overrightarrow{pq}}_{\underset{vor}{=}\overrightarrow{rs}} + \overrightarrow{qr}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{qr}$$
$$= \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{rs}$$
$$\underset{(A2)}{=} \overrightarrow{qs}$$

„$\Leftarrow$": $\overrightarrow{rs} = \overrightarrow{rq} + \underbrace{\overrightarrow{qs}}_{=\overrightarrow{pr}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{rq} + \overrightarrow{pr}$$
$$= \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}$$
$$\underset{(A2)}{=} \overrightarrow{pq}$$

$\square$

Translation T_u, $u \in V$:

$X \to X$

$p \mapsto T_u(p) = (\ell(p,\cdot))^{-1}(u)$, mit p fest

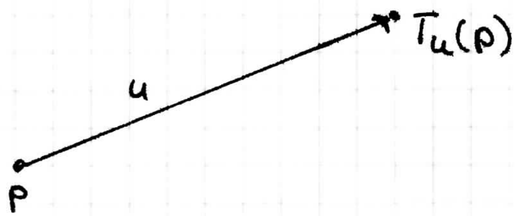
Translationen sind bijektiv und es gilt

$T_u \circ T_{u'} = T_{u+u'}$

Unter einer Translation versteht man eine Verschiebung, d.h. man verschiebt jeden Punkt des Raumes um diesen bestimmten Vektor.

zur Definition „Translation"

Wende $\ell(p,\cdot)$ an auf $T_u(p)$: $\ell(p, T_u(p)) = u$



Setzt man den Vektor „u" an den Punkt p, so bekommt man den Punkt $T_u(p)$.