Korrektur Vorlesungsausarbeitung vom 04.11.2009 von Claudia Lamping

4P mit dem Hinweis: dies ist noch keine textlich voll ausgearbeitete Mitschrift, da Sie noch sehr oft Text mit formalen Zeichen vermischen (und diese dabei teilweise ungenau benutzen)

17.12.2009

Beispiel 3: Standardbeispiel

Sei V ein K-Vektorraum und sei $\Gamma = X = a + U$ mit U UVR von V ein affiner Unterraum dieses K-Vektorraums mit der Abbildung $\varphi : X \times X \to U$, $(p,q) \to \overrightarrow{pq} = (q-p)$.

Es soll nun überprüft werden, ob Γ ein affiner Raum nach Definition 2, Kapitel 1, §1 ist. Dafür sind folgende zwei Bedingungen zu überprüfen:

I (A1): $\forall p \in X$ ist $\varphi(p,\cdot)$ bijektiv

II (A2): $\forall p,q,r \in X$: $\varphi(p,q) = \varphi(p,r) + \varphi(r,q)$

Zunächst soll (A1) bewiesen werden; dafür müssen sowohl die Injektivität als auch die Surjektivität der Abbildung φ nachgewiesen werden.

I (A1) Beh.: $\forall p \in X$ ist $\varphi(p,\cdot)$ bijektiv

Bew.: i) Beh.: $\forall p \in X$ ist $\varphi(p,\cdot)$ injektiv,

d.h. für ein beliebiges, aber festes $p \in X$:

$(\forall q, q' \in X)\ [\varphi(p,q) = \varphi(p,q') \Rightarrow q = q']$

Bew.: Seien $p, q, q' \in X$ und gelte $\varphi(p,q) = \varphi(p,q')$.

$\Rightarrow q - p = q' - p \quad | + p$

$\Rightarrow q = q'$

$\Rightarrow$ für ein beliebiges, aber festes $p \in X$:

$(\forall q, q' \in X)\ [\varphi(p,q) = \varphi(p,q') \Rightarrow q = q']$

ii) Beh.: $\forall p \in X$ ist $\varphi(p,\cdot)$ surjektiv,

d.h. für ein beliebiges, aber festes $p \in X$:

$(\forall u \in U)\ (\exists q \in X) : [\varphi(p,q) = u]$

Bew.: Sei $p \in X$ beliebig, aber fest. Sei $u \in U$.

Setze $q = p + u$, dann gilt:

$\varphi(p,q) = \varphi(p, p+u) = (p+u) - p = \cancel{p} + u - \cancel{p} = u$

$\Rightarrow$ für ein beliebiges, aber festes $p \in X$:

$(\forall u \in U)\ (\exists q \in X) : [\varphi(p,q) = u]$

$\xRightarrow[i) + ii)]{} \forall p \in X$ ist $\varphi(p,\cdot)$ bijektiv.

Nun erfolgt die Überprüfung von Bedingung (A2):

II (A2) Beh.: $\forall p,q,r \in X$: $\varphi(p,q) = \varphi(p,r) + \varphi(r,q)$

Bew.: Seien $p, q, r \in X$.

$$\varphi(p,r) + \varphi(r,q) = (r-p) + (q-r) = \cancel{r} - p + q - \cancel{r} = -p + q = q - p = \varphi(p,q)$$

$\Rightarrow \forall p,q,r \in X$: $\varphi(p,r) + \varphi(r,q) = \varphi(p,q)$.

wovon? $\xRightarrow{I + II}$ Da die Bedingungen (A1) und (A2) gelten, ist Γ ein affiner Raum gemäß Definition 2. q.e.d.

Bemerkung

Sei X ein „abstrakter" affiner Raum der Dimension $\dim_K X = n$. Sei W ein m-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K W = m > \dim_K X = n$ und sei V ein Untervektorraum von W.

X lässt sich nun in der Form „$w + V$" in W einbetten, wobei $w \in W$ beliebig ist: Sei $p \in X$ fest und $w \in W$ vorgegeben, sei $\mathcal{E}_p : X \to \Gamma = w + V$ derart, dass $\mathcal{E}_p(q) = w + \varphi(p,q)$. $\mathcal{E}_p$ ist bijektiv.

Man kann also jeden n-dimensionalen „abstrakten" affinen Raum auf verschiedene Weise in einen m-dimensionalen Vektorraum W einbetten (wobei $m \geq n$). Dies ist die Rechtfertigung dafür, dass es möglich ist, dass wir uns (später) auf die Standardsituation „$a + U$" in einem K-Vektorraum oder sogar in K^n zurückzuziehen.

Affine Unterräume (aUR-e) eines abstrakten affinen Raumes (aR-es)

Definition 4: Affiner Unterraum

Sei (X, V, φ) ein affiner Raum. $Y \subseteq X$ heißt affiner Unterraum von X, wenn $Y = \emptyset$ oder wenn $Y \neq \emptyset$ und die Menge $\varphi(z,\cdot)(Y)$ für ein $z \in Y$ ein Untervektorraum von V ist.

Bezeichnung: $\vec{Y} := \varphi(z,\cdot)(Y)$ wird bezeichnet als Verschiebungsvektorraum bzw. als Richtung von Y.

Beh.: $\vec{Y}$ ist unabhängig von z

Bew.: Sei Y ein affiner Unterraum von X und seien $z, z' \in Y$.

zu zeigen ist: $\underbrace{\varphi(z,\cdot)(Y)}_{=\vec{Y}} = \varphi(z',\cdot)(Y)$

„$\supseteq$" Sei $y \in Y$: $\varphi(z', y) \underset{(A2)}{=} \varphi(z', z) + \varphi(z, y)$

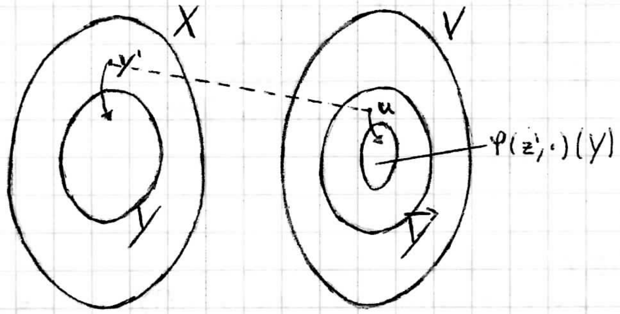
$\underset{\text{erste Regeln}}{=} \underbrace{-\varphi(z,z')}_{\in \vec{Y}} + \underbrace{\varphi(z,y)}_{\in \vec{Y}}$

$\underset{\substack{\vec{Y} \text{ ist UVR von } V, \\ \text{Abgeschlossenheit} \\ \text{bzgl. der Addition}}}{\Longrightarrow}$ $\varphi(z', y) \in \vec{Y}$

$\underset{\text{Bild}(\varphi(z',\cdot)) \in \vec{Y}}{\Longrightarrow}$ $\varphi(z',\cdot)(Y) \subseteq \vec{Y}$

Text

„$\subseteq$" Zunächst eine Skizze:



Sei $u \in \vec{Y}$. u ist also fest.

Aus (A1) folgt, dass ein $y' \in X$ existiert, sodass $u = \varphi(z', y')$.

$$u = \varphi(z', y') \underset{(A2)}{=} \varphi(z', z) + \varphi(z, y')$$

$$\underset{\text{erste Regeln}}{=} -\varphi(z, z') + \varphi(z, y')$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\varphi(z', y')}_{\in \vec{Y}} + \underbrace{\varphi(z, z')}_{\in \vec{Y}} = \varphi(z, y')$$

nach Voraussetz.

$$\underset{\substack{\vec{Y} \text{ ist UVR von } V \\ \text{Abgeschlossenheit} \\ \text{bzgl. der Addition}}}{\Longrightarrow} \quad \varphi(z, y') \in \vec{Y}$$

$\Rightarrow$ $y' \in Y$, da $\varphi(z, \cdot): Y \to \vec{Y}$ bijektiv ist

Mischung Text/Formel unglücklich

$$\underset{u = \varphi(z', y')}{\Longrightarrow} \quad u \in \varphi(z', \cdot)(Y)$$

$$\underset{u \in \vec{Y}}{\Longrightarrow} \quad \varphi(z, \cdot)(Y) \subseteq \varphi(z', \cdot)(Y)$$

hier meinen Sie "alle u"

$$\underset{\text{„}\supseteq\text{" + „}\subseteq\text{"}}{\Longrightarrow} \quad \varphi(z, \cdot)(Y) = \varphi(z', \cdot)(Y)$$

$\Rightarrow$ $\vec{Y}$ ist unabhängig von z. q.e.d.

Affine Hülle, affine Unabhängigkeit, affine Erzeugung, affine Basis ...

Regel

Wir benötigen folgende Regel:

Sei (X, V, φ) "=" X ein affiner Raum. Für eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von affinen Unterräumen von X ist

$\bigcap_{i \in I} Y_i$ affiner Unterraum von X.

Bew.: Sei $Y' := \bigcap_{i \in I} Y_i$

zu zeigen: Y' ist affiner Unterraum von X

Es folgt eine Fallunterscheidung:

i) $Y' = \emptyset$

$\underset{\substack{\emptyset \text{ ist aUR} \\ \text{gem. Definition}}}{\Longrightarrow}$ Y' ist affiner Unterraum von X

ii) $Y' \neq \emptyset$

Sei $p \in Y'$; dann folgt, da $Y' = \bigcap_{i \in I} Y_i$: $p \in Y_i$ für alle $i \in I$

und es folgt, da Y_i aUR für alle $i \in I$:

$Y_i = p + U_i \quad \forall i \in I$ und U_i ist UVR von $V \quad \forall i \in I$

?

Sei $U' := \bigcap_{\substack{\cancel{\forall i \in I} \\ i \in I}} U_i$

$\underset{\substack{\cancel{U' \text{ ist UVR}} \\ \text{nach LinA}}}{\Longrightarrow}$ U' ist UVR von V $\quad \Longrightarrow$ hier fehlt ein Platz.

nun noch zu zeigen: $Y' = p + U'$

Beh.: $Y' = p + U'$

Bew.: ~~Sei~~ Für alle $y \in Y'$ gilt:

wer steht hier? $(y \in Y')$

$\underset{Y' = \bigcap_{i \in I} Y_i}{\Longleftrightarrow}$ $y \in Y_i$ für alle $i \in I$

$\underset{\substack{Y_i = p + U_i \\ \text{für } i \in I}}{\Longleftrightarrow}$ $y = p + u_i$ und $u_i \in U_i$ für $i \in I$

$\Longleftrightarrow$ $y - p = u_i \in U_i \quad \forall i \in I$ $\quad$! sonst $\Leftrightarrow$ falsch.

$\underset{\cancel{u_i \in U_i}}{\Longleftrightarrow}$ $y - p \in U_i \quad \forall i \in I$

$\Longleftrightarrow$ $y - p \in \bigcap_{i \in I} U_i$

$\underset{U' = \bigcap_{i \in I} U_i}{\Longleftrightarrow}$ $y - p \in U'$

$\Longleftrightarrow$ $y \in p + U'$

Damit ist gezeigt $Y' = p + U'$

Text $\quad \underset{\substack{U' \text{ ist UVR von } V \\ p \in Y'}}{\Longrightarrow}$ $Y' = p + U'$ ist affiner Unterraum von X.

Zu viele $\Rightarrow$ $\Rightarrow$; nicht alle sind logisch korrekt platziert.

Der Durchschnitt affiner Unterräume ist somit ein affiner Unterraum.

Damit definieren wir für $M \subseteq X$ die affine Hülle

$$\overline{M}^{\text{aff.}} := \bigcap_{\substack{Y \text{ aUR von } X \\ M \subseteq Y}} Y$$

Bemerkung

„$\overline{}^{\text{aff.}}$" ist ein Hüllenoperator, d.h. es gelten folgende Regeln:

- $M \subseteq \overline{M}^{\text{aff.}}$
- $\overline{\overline{M}^{\text{aff.}}}^{\text{aff.}} = \overline{M}^{\text{aff.}}$
- Monotonie bzgl. $\subseteq$ (analog zur Analysis, abgeschlossene Hülle einer Punktmenge im $\mathbb{R}^2$, relativ algebraischer Abschluss)

Satz 5: Explizite Darstellung der affinen Hülle

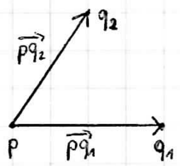
Sei (X, V, φ) "=" X ein affiner Raum und sei $M \subseteq X$.

Ist $M = \emptyset$, so ist $\overline{M}^{\text{aff.}} = \overline{\emptyset}^{\text{aff.}} = \emptyset$. Die affine Hülle der leeren Menge ist somit wiederum die leere Menge.

Ist $M \neq \emptyset$, so ist für ein beliebiges, aber festes $p \in M$
$\overline{M}^{\text{aff.}} = \varphi(p, \cdot)^{-1}\left(\left\langle \{\overrightarrow{pq};\, q \in M\} \right\rangle_K\right)$

Dabei sei $A := \{\overrightarrow{pq};\, q \in M\}$ die Menge der Verschiebungsvektoren von einem festen $p \in M$ ausgehend zu jedem $q \in M$.
$W := \langle \{\overrightarrow{pq},\, q \in M\} \rangle_K = \langle A \rangle_K$ sei der von A erzeugte Untervektorraum von V.

Skizze:



Die zwei Vektoren $\overrightarrow{pq_1}$ und $\overrightarrow{pq_2}$ erzeugen einen zweidimensionalen Untervektorraum $\langle\{\overrightarrow{pq_1}, \overrightarrow{pq_2}\}\rangle_K$

[Der Beweis dieses Satzes erfolgt in der nächsten Vorlesung]

Definition 6: Affine Erzeugung, affine Unabhängigkeit, affine Basis

(a) Affine Erzeugung
Sei Y ein affiner Unterraum von (X, V, φ) "=" X. Sei M eine Teilmenge von X.

M erzeugt Y affin $:\Leftrightarrow \overline{M}^{\text{aff.}} = Y \Leftrightarrow:$ M ist affines Erzeugendensystem von Y.

(b) Affine Basis
Ein affines Erzeugendensystem M des affinen Unterraumes Y von X heißt unverkürzbar oder affine Basis von Y oder affines Bezugssystem von Y, wenn gilt:

$\forall\, p \in M: \overline{M \setminus \{p\}}^{\text{aff.}} \neq Y$

(c) Affine Unabhängigkeit

Eine Teilmenge M von X heißt affin unabhängig oder in allgemeiner Lage, wenn M eine affine Basis von $\overline{M}^{aff}$ ist.

Anmerkung: Die Aussagen dieser Definition sind unabhängig von der Anordnung der Elemente in M; M ist also einfach als eine Menge zu betrachten.

Schreibweise

Wenn $\Gamma = \{a_1, \dots, a_r\}$ endlich ist, schreibe bzw. sage $(a_1, \dots, a_r)$ [dies bezeichnet eine geordnete Menge] oder $a_1, \dots, a_r$ [dies bezeichnet eine nicht geordnete Menge] ist affin (oder anderes), statt $\{a_1, \dots, a_r\}$ ist ...