

1 Kapitel

1.1 Was ist Geometrie?

Zu Beginn der Vorlesung „Geometrie“ wurden folgende Fragen in den Raum gestellt:

- (1) Was ist (eine) Geometrie?
- (2) Was ist analytische Geometrie?
- (3) Was ist synthetische Geometrie?
- (4) Wie sehen exemplarische Anfänge synthetischer Geometrie am Beispiel der ebenen Inzidenzgeometrie aus?

Diese grundlegenden Fragen wurden ansatzweise beantwortet, sodass hier nur ein grober Überblick geschaffen wird. Die folgenden Antworten sind somit noch ausbaufähig.

(Zu 1): Im Allgemeinen ist es nicht einfach eine Definition zu geben, was Geometrie beinhaltet. Außerdem gibt es auch keine klar abgrenzbare Definition. Somit wird auch hier lediglich ein Versuch unternommen (eine) Geometrie zu beschreiben.

Geometrie kann als eine alte mathematische Disziplin bezeichnet werden, die die Lehre von den Formen und Figuren darstellt. Der Begriff Geometrie lässt sich vom Griechischen ableiten und bedeutet Landvermessung bzw. Erdmaß. Die Griechen waren es, die die Geometrie zur Wissenschaft machten und sie dabei mit der Theorie der Zahlen verknüpften. Ebenfalls geht die axiomatische Geometrie auf sie zurück (mit Euklid etc.).

Häufig charakterisiert man die Geometrie als die euklidische Elementargeometrie, die sich auf den zwei- bzw. dreidimensionalen Raum bezieht und in der Schule Gegenstand des Mathematikunterrichts ist. Auf der anderen Seite ist die Geometrie ein großes Teilgebiet der Mathematik geworden, die viele Verbindungen zu anderen mathematischen Bereichen herstellt, wie z. B. zur Differentialgeometrie, Algebra, Topologie etc.

Die Geometrie lässt sich in viele Bereiche einteilen: projektive Geometrie, affine Geometrie, Ähnlichkeitsgeometrie, euklidische Geometrie, analytische Geometrie. Diese Liste soll nur einen Auszug darstellen, um wiederholt zu verdeutlichen, dass es nicht einfach ist einen klaren Umriss um den Begriff einer Geometrie zu geben.

In dem Buch „Einführung in das mathematische Denken“ von Waismann [1] wird ebenso herausgestellt, dass die Beantwortung der Frage, was Geometrie ist, nicht eindeutig zu beantworten ist. Somit kommt er zu dem Schluss: „In der Reihe der

Geometrien steht also an dem einen Ende die metrische Geometrie (oder eigentlich Topographie, die jedes räumliche Gebilde individuell auffaßt [sic]), am anderen Ende die Mengenlehre. Jeder anderen Geometrie kommt ein Platz zwischen diesen Extremen zu.“

(Zu 2): Die analytische Geometrie ist ein Teilgebiet der Geometrie. In diesem Teilgebiet können geometrische Aufgabenstellungen rechnerisch gelöst werden, da sie algebraische Hilfsmittel zur Lösung dieser bereitstellt. Das bedeutet im Großen und Ganzen, dass diese Geometrie nicht an Axiomen, sondern am Zahlbegriff ansetzt, das heißt an Begriffen wie Zahlen, Koordinaten und Räumen. Zugrunde gelegt werden immer ein Körper K , ein Koordinatenraum K^n oder ein n -dimensionaler Vektorraum (n -dim VR). Spezielle Vektorräume sind hier beispielsweise reelle VR-e, komplexe VR-e, euklidische VR-e sowie unitäre VR-e. Ein Spezialfall ist der Vektorraum \mathbb{R}^n bzw. dann ganz speziell der \mathbb{R}^3 .

Die Vorteile der analytischen Geometrie liegen also offensichtlich darin, dass hier mit Zahlen gerechnet werden kann und sie flexibel in der Technik, der Datenverarbeitung sowie in den Naturwissenschaften Anwendung findet.

(Zu 3): Gegenüber der analytischen Geometrie basiert die synthetische Geometrie auf ein Axiomensystem oder begründet ihre Sätze aus der Anschauung heraus. Um diesen Bereich der Geometrie zu beschreiben, sind vor allem Euklid und Hilbert zitiert worden. Euklid versucht im Vorspann zu seinen aufgestellten Axiomen folgende „Definitionen“ von einem Punkt und einer Linie/Strecke zu geben:

- (i) Ein Punkt ist etwas, was keine Teile hat.
- (ii) Eine Linie (Strecke) ist eine breitenlose Länge.
- (iii) Die Enden einer Strecke sind Punkte.

Das Ziel von Euklid und Hilbert ist die Erfassung der Geometrie des Anschauungsraumes wie z. B. der Versuch von Euklid (siehe oben) Punkte und Linien zu definieren, wobei die entwickelten Axiome nicht vollständig waren [2]. Im Gegensatz dazu stellte Hilbert das erste vollständig widerspruchsfreie Axiomensystem für die Geometrie des Anschauungsraumes auf.

Ganz allgemeine Beispiele für die sogenannte synthetische Geometrie sind geometrisch motivierte Axiomensysteme und deren Folgerungen wie die ebene Inzidenzgeometrie (siehe 4).

(Zu 4): Exemplarisch für das synthetische Vorgehen in der Geometrie werden im nächsten Unterkapitel die Anfänge einer ebenen Inzidenzgeometrie entwickelt.

1.2 Ebene affine Inzidenzgeometrie

Was heißt „inzident“?

Seien P und G zwei nicht-leere Mengen, wobei P die Menge der Punkte und G die Menge der Geraden beschreibt. Betrachte dann I als Relation auf $P \times G$. Seien $a \in P$ und $g \in G$, dann bedeutet $a I g$ (a inzident g):

a liegt auf g bzw. g geht durch a

Folgende Schreib-/Sprechweise wird festgelegt:

- $a I g$ und $b I g$: $a, b I g$
- $a, b I g$: a, b kollinear
- Für mehrere Punkte gilt analog:
 $a, b, c, \dots I g$: a, b, c, \dots kollinear
- „Kollinear“ bedeutet, dass die Punkte auf einer Geraden liegen.

Folgende Axiome werden zunächst grundlegend sein, die dann später durch weitere Axiome ergänzt werden:

A₁: Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

$\forall a, b \in P, a \neq b \quad \exists g \in G: \quad a I g \quad \text{und} \quad b I g$

Schreibweise: $a \vee b := g$

g ist die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade.

A₂: Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

$\exists a, b, c \in P, a \neq b \neq c \neq 0: \quad \forall g \in G \quad a \not I g \quad \text{oder} \quad b \not I g \quad \text{oder} \quad c \not I g$

Beispiele zu A₁ und A₂:

Überprüfe jeweils, ob die Axiome A₁ und A₂ gelten!

(a) Seien $P = \{a, b, c\}$ und $G = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ sowie $I = \in$.

A₁ gilt, da immer durch je zwei verschiedene Punkte aus der Punktmenge P genau eine Gerade aus der Geradenmenge G geht.

A₂ gilt auch, da es immer einen Punkt gibt, der nicht auf den Geraden liegt.

- (b) Seien $P = \{a, b, c\}$ und $G = \{\{a, b, c\}\}$ sowie $I = \in$.
 A_1 gilt (wie in (a)).
 A_2 gilt nicht, denn alle drei Punkte liegen auf der Geraden aus G , das heißt keiner dieser Punkte liegt außerhalb dieser.
- (c) Seien $P = \{a, b, c\}$ und $G = \{\{a, b\}\}$ sowie $I = \in$.
 A_1 gilt nicht, weil die Menge G keine Gerade enthält, die durch den Punkt c verläuft.
 Wähle zum Beispiel $a, c \in P$, so gibt es keine Gerade aus der Geradenmenge G , die durch die beiden ausgewählten Punkte verläuft, da nur die eine Verbindungsgerade, nämlich $a \vee b$ existiert.
 A_2 gilt, weil beispielsweise der Punkt c nicht auf der Geraden liegt (siehe oben).

Ein drittes Axiom wird hinzugefügt:

- A₃:** Zu einer Geraden g und einem Punkt a , der nicht auf g liegt,
 gibt es genau eine Gerade h durch a ohne gemeinsamen Punkt mit g .
Schreibweise: $g \parallel h$ („Parallelaxiom“)

Beispiele zu A₁ - A₃:

Überprüfe jeweils, ob die Axiome A₁ - A₃ gelten!

- (a) Seien $P = \{a, b, c, d\}$ und $G = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$. Demnach ist G die Menge aller zweielementigen Teilmengen.
 Erinnerung: Für $a \in P$ und $g \in G$: $a \in g$, wenn $a \in g$.
 Wir wissen: $|P|=4$, P enthält vier Punkte.
 $|G|=6$, G enthält sechs Geraden.
 A_1 gilt, da durch je zwei verschiedene Punkte aus der Punktmenge P stets genau eine Gerade aus der Geradenmenge G geht.
 A_2 gilt auch, da es immer mindestens einen Punkt gibt, der nicht auf den einzelnen Geraden liegt.
 A_3 gilt, da es immer zu einer Geraden g aus G und einem Punkt aus P , der nicht auf g liegt, genau eine Gerade h durch diesen ausgewählten Punkt aus P gibt ohne gemeinsamen Punkt mit g .
Zum Beispiel:
 Sei $g := a \vee b$. Dann ist c ein Punkt außerhalb dieser Geraden g , durch den h geht. Es kann sich bei dieser parallelen Geraden nur um die Verbindungsgerade $c \vee d$ handeln,

da die anderen Geraden aus G jeweils a und/oder b enthalten. Analog gilt dies auch für die anderen Fälle.

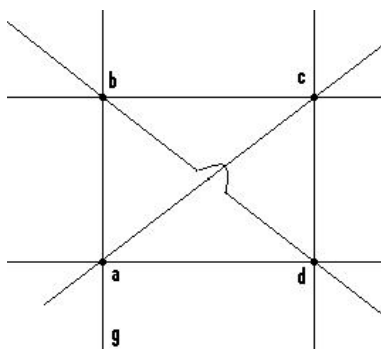


Abbildung 1: Skizze zu Beispiel (a)

(b) Seien $P = (\mathbb{Z}_2)^2$ und $G = \{\text{eindimensionale affine Unterräume}\}$.

Allgemein sieht ein eindimensionaler Untervektorraum wie folgt aus:

$$\langle v \rangle_{\mathbb{K}} \text{ mit } v \in P \text{ und } v \neq 0.$$

Für unseren Fall sind

$$U_1 = \langle (1, 0) \rangle_{\mathbb{Z}_2} \quad \Gamma_4 = (1, 0) + U_2$$

$$U_2 = \langle (0, 1) \rangle_{\mathbb{Z}_2} \quad \text{sowie} \quad \Gamma_5 = (1, 0) + U_3$$

$$U_3 = \langle (1, 1) \rangle_{\mathbb{Z}_2} \quad \Gamma_6 = (0, 1) + U_1$$

alle möglichen eindimensionalen affine Unterräume.

Wir wissen: $|U_i| = 2$ und ebenso $|\Gamma_i| = 2$, $P = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ und $G = \{U_1, U_2, U_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6\}$.

A_1 gilt, da durch je zwei Punkte genau eine Gerade geht:

- Durch $(0, 0)$ und $(0, 1)$ geht U_2 .
- Durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$ geht U_1 .
- Durch $(0, 0)$ und $(1, 1)$ geht U_3 .
- Durch $(0, 1)$ und $(1, 0)$ geht Γ_5 .
- Durch $(0, 1)$ und $(1, 1)$ geht Γ_6 .
- Durch $(1, 0)$ und $(1, 1)$ geht Γ_4 .

A_2 gilt, da es immer genau zwei Punkte gibt, die nicht auf einer Geraden liegen. A_2 fordert, dass es drei nicht kollineare Punkte gibt, das bereits im ersten Fall erfüllt ist.

- Die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 1)$ liegen nicht auf U_1 .
- Die Punkte $(1, 0)$ und $(1, 1)$ liegen nicht auf U_2 .

- Die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ liegen nicht auf U_3 .
- Die Punkte $(0,0)$ und $(0,1)$ liegen nicht auf Γ_4 .
- Die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ liegen nicht auf Γ_5 .
- Die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ liegen nicht auf Γ_6 .

A_3 gilt, da es immer zu einer Geraden g und einem Punkt, der außerhalb dieser Geraden g liegt, genau eine Gerade h aus G durch diesen ausgewählten Punkt gibt ohne gemeinsamen Punkt mit g . Beispielsweise liegt der Punkt $(0,0)$ außerhalb der Geraden Γ_4 . Die Gerade U_2 geht durch den Punkt $(0,0)$ und ist parallel zu Γ_4 . Analog gilt dies auch für die anderen Fälle.

Bemerkung:

Die Beispiele (a) und (b) zeigen gleichermaßen:

Die Axiome A_1 , A_2 und A_3 sind widerspruchsfrei, da jeweils ein Modell gefunden wurde, in dem die Axiome gültig sind.

Weitere Bezeichnungen und Sprechweisen:

- Sei (P, G, I) mit I als eine Relation auf $P \times G$ gegeben, das heißt zu jedem Paar $(a, g) \in P \times G$ liegt eine ja-/nein-Entscheidung vor:

$$\begin{array}{cc}
 a I g & a \not I g \\
 \text{ja} & \text{nein} \\
 a \text{ inzident mit } g & a \text{ nicht inzident mit } g
 \end{array}$$

- Zu $g \in G$ sei $P_g := \{a \in P: a I g\}$ die Menge aller Punkte, die auf der Gerade g liegen.
- g ist parallel zu h ($g \parallel h$) genau dann, wenn $P_g \cap P_h = \emptyset$

Definition 1:

Sei (P, G, I) wie oben und $P \neq \emptyset \neq G$. Wenn $A_1 - A_3$ gelten, dann heißt (P, G, I) ebene affine Inzidenzgeometrie (eaI).

Satz 2:

Sei (P, G, I) eine ebene affine Inzidenzgeometrie, dann:

- (a) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.
- (b) Durch jeden Punkt gehen mindestens drei verschiedene Geraden.
- (c) Es gibt stets mindestens vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind.
- (d) Es gibt stets mindestens sechs verschiedene Geraden.

Beweis:

- (a) Sei $g \in G$. Wegen A_2 gibt es drei verschiedene nicht kollineare Punkte, etwa a, b, c .
Es gelte ohne Einschränkung: $a \notin g$.

Fallunterscheidung:

- ① $b, c \in g$:

Dieser Fall ist einfach, denn dann liegen bereits zwei Punkte auf g .

- ② $b \in g, c \notin g$:

Nach A_1 existiert die Verbindungsgerade $a \vee c$.

Unterscheide dabei (i) $a \vee c \parallel g$ und (ii) $a \vee c \not\parallel g$.

- (i) $a \vee c \parallel g$:

Nach A_3 existiert eine Gerade $h \parallel a \vee c$ mit $c \in h$. Da a, b, c nicht kollinear sind, ist $h \neq a \vee c$ und $h \neq a \vee b$. Daraus folgt $h \parallel g$ wegen A_3 . Damit ist $P_g \cap P_h \neq \emptyset$, wobei der „Schnittpunkt“ ungleich b sein muss, da b nicht inzident mit h ist.

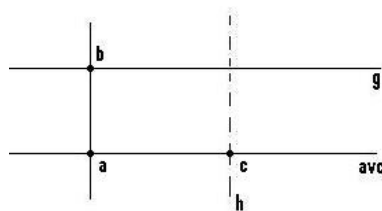


Abbildung 2: Skizze zum 2. Fall (i)

- (ii) $a \vee c \not\parallel g$:

Da $P_g \cap P_h \neq \emptyset$ gilt, existiert ein Schnittpunkt d . Da a, b, c nicht kollinear sind, kann nicht $d = b$ sein. Es gibt also mindestens zwei Punkte auf g .

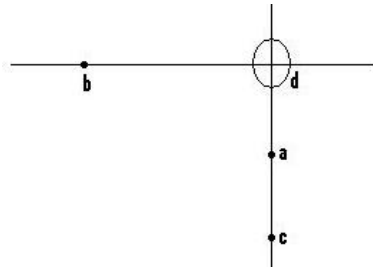


Abbildung 3: Skizze zum 2. Fall (ii)

③ $b, c \not\parallel g$:

Die drei Geraden $a \vee c$, $a \vee b$, $b \vee c$ können nicht alle parallel zu g sein wegen A_3 .

- Wenn $a \vee b \parallel g$, dann $b \vee c \not\parallel g$ wegen A_3 und umgekehrt.
- Wenn $a \vee c \parallel g$, dann $a \vee b \not\parallel g$ wegen A_3 und umgekehrt.
- Wenn $a \vee c \parallel g$, dann $b \vee c \not\parallel g$ wegen A_3 und umgekehrt.

Dies führt zu mindestens zwei verschiedenen Punkten auf g .

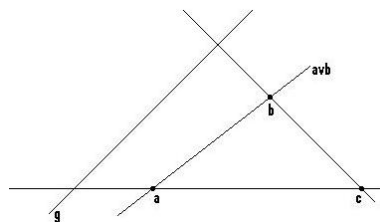


Abbildung 4: Skizze zum 3. Fall

- (b) Sei $a \in P$. Nicht alle Punkte können zusammen kollinear sein. Daher seien ohne Einschränkung a, b, c nicht kollinear. Nach A_3 existiert eine eindeutige Parallele h zu $b \vee c$ durch a . Also gehen die Geraden $a \vee b$, $a \vee c$ und h , die paarweise verschieden sind, durch den Punkt a .

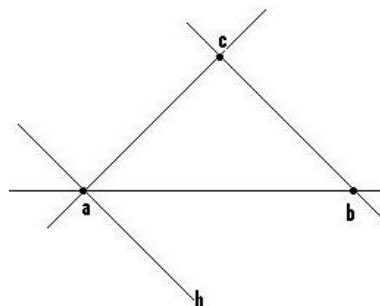


Abbildung 5: Skizze zu (b)

- (c) Nach A_2 gibt es mindestens drei Punkte, die nicht kollinear sind, etwa a, b, c . A_1 besagt, dass durch je zwei verschiedene Punkte je eine Gerade geht, das heißt es

existieren die Verbindungsgeraden $a \vee b$, $b \vee c$ und $a \vee c$. Da a, b, c nicht kollinear sind, gilt für diese drei Geraden, dass sie paarweise verschieden sind.

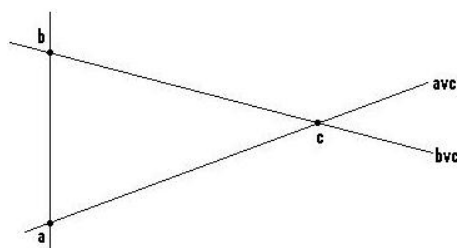


Abbildung 6: 1. Skizze zu (c)

Mit Hilfe von A_3 kann man auf die Existenz zweier weiterer Geraden schließen: Sei g_c die parallele Gerade zu $a \vee b$ durch c und sei g_a die parallele Gerade zu $b \vee c$ durch a . (Beachte: c liegt nicht auf $a \vee b$ und a liegt nicht auf $b \vee c$, da a, b, c nicht kollinear sind.)

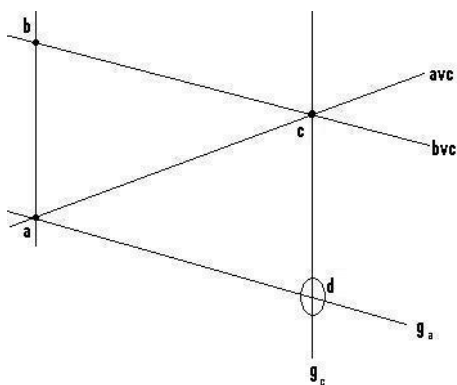


Abbildung 7: 2. Skizze zu (c)

Zunächst drei „triviale“ Fakten:

- (1) $a \vee b \neq g_a$, denn $b \in a \vee b$ nach Definition, aber $b \notin g_a$ (sonst hätten g_a und $b \vee c$ den gemeinsamen Punkt b , aber $g_a \parallel b \vee c$).
- (2) $b \vee c \neq g_c$, denn $b \in b \vee c$, aber $b \notin g_c$ (Begründung wie bei (1)).
- (3) $a \vee c \neq g_a$, denn $c \in a \vee c$, aber $c \notin g_a$ (Begründung wie bei (1)).

Behauptung:

g_a und g_c sind nicht parallel.

Annahme:

Sei $g_a \parallel g_c$, das heißt es existiert also kein gemeinsamer Punkt d .

Beweis:

Nach Konstruktion ist $g_c \parallel a \vee b$. Außerdem gilt: $a \perp a \vee b$ und $a \perp g_a$. Da es nach A_3 nur eine parallele Gerade zu g_c durch a gibt ($a \not\perp g_c$, da $a \perp a \vee b$ und $a \vee b \parallel g_c$), würde folgen: $a \vee b = g_a$ ($\not\perp$ zu (1)). Damit existiert also ein Punkt d in $g_a \cap g_c$.

Zeige nun noch, dass von diesen vier Punkten keine drei kollinear sind.

(i) a, b, c sind nach Konstruktion nicht kollinear

(ii) b, c, d sind nicht kollinear, denn sonst würde nach A_1 gelten:

$$g_c = b \vee c \quad (\not\perp \text{ zu (2)})$$

(iii) a, b, d sind nicht kollinear, denn sonst würde nach A_1 gelten:

$$g_a = a \vee b \quad (\not\perp \text{ zu (1)})$$

(iv) a, c, d sind nicht kollinear, denn sonst würde nach A_1 gelten:

$$g_a = a \vee c \quad (\not\perp \text{ zu (3)})$$

Insgesamt folgt also, dass es stets mindestens vier Punkte gibt, von denen keine drei kollinear sind.

(d) Mit (c) existieren mindestens vier Punkte von denen keine drei kollinear sind, etwa a, b, c, d . Nach A_1 geht stets genau eine Gerade durch je zwei verschiedene Punkte. Somit existieren die Verbindungsgeraden $a \vee b, a \vee c, a \vee d, b \vee c, b \vee d$ und $c \vee d$. Daher gibt es immer mindestens sechs Geraden.

Bemerkung:

Sei (P, G, I) eine ebene affine Inzidenzgeometrie. Die Abbildung $g \mapsto P_g$ ist injektiv. Dies erschließt sich aus Satz 2 und A_1 .

Seien g und h zwei Geraden, für die gilt: $P_g = P_h$. Nach Satz 2 (a) gilt $|P_g| \geq 2$, das heißt es existieren mindestens zwei Punkte p und q , die zugleich auf g und h liegen: $p \perp g, h$ und $q \perp g, h$. Nach A_1 muss dann aber gelten: $g = h$, da es nur genau eine Gerade gibt, auf der beide Punkte liegen.

Zum weiteren Ausbau der Theorie der ebenen affinen Inzidenzgeometrie:

Einer der Höhepunkte der Theorie ebener affiner Inzidenzgeometrien wird erreicht durch Hinzunahme des folgenden weiteren geometrisch einleuchtenden Axioms:

A_4 : Seien die Punkte z, a, a' verschieden und kollinear, ebenso z, b, b' und z, c, c' . Außerdem seien die drei dadurch gegebenen Geraden $z \vee a, z \vee b, z \vee c$ verschieden. Wenn dann $a \vee b \parallel a' \vee b'$ und $b \vee c \parallel b' \vee c'$, dann ist auch $c \vee a \parallel c' \vee a'$ (affiner Satz von Desargues (Gérard, 1593-1662)).

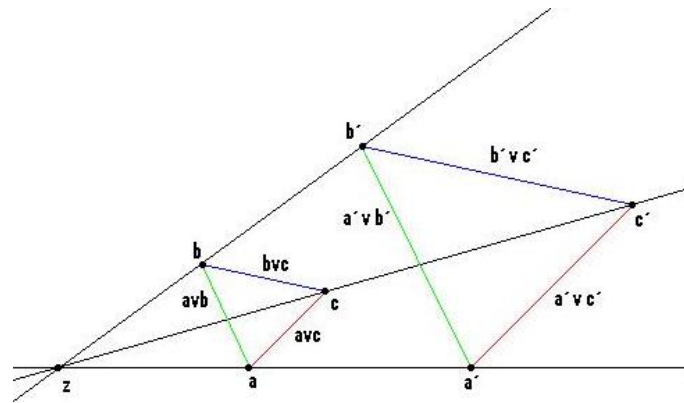


Abbildung 8: Affiner Satz von Desargues

Folgende Resultate können erreicht werden:

Satz 4:

Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G, I) . Gilt zusätzlich A_4 , dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2$, $G =$ Menge der eindimensionalen affinen Unterräume in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Geraden in K^2 mit einem Körper K , der allerdings nicht notwendigerweise kommutativ ¹ ist.

Satz 5:

Gegeben sei eine ebene affine Inzidenzgeometrie (P, G, I) . Gilt zusätzlich A_5 , dann ist bis auf „Isomorphie“ $P = K^2$, $G =$ Menge der eindimensionalen affinen Unterräume in K^2 und I die übliche Relation des Enthaltenseins eines Punktes in einer Geraden in K^2 mit einem kommutativen Körper K . Dabei ist A_5 das folgende ebenfalls geometrisch einleuchtende Axiom:

¹Im nicht-kommutativen Fall spricht man von einem Schiefkörper. Wichtige Teile der linearen Algebra können unbeschadet auch über nicht-kommutativen Körpern entwickelt werden. Dazu gehören lineare Gleichungen und deren Lösungsräume bzw. affine Unterräume. Statt von Vektorräumen wird dann meist von Modulen über einem Schiefkörper gesprochen. Ein Modul über einem nicht unbedingt kommutativen Körper K wird K -Vektorraum genannt. Die Theorie dazu findet man in den etwas umfangreicheren Algebralehrbüchern, wie z.B. dem von Günter Scheja und Uwe Storch im Teil I.

A₅: Seien die Punkte a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 jeweils verschieden und kollinear auf verschiedenen Geraden. Wenn dann $a_1 \vee b_2 \parallel a_2 \vee b_3$ und $a_2 \vee b_1 \parallel a_3 \vee b_2$, dann ist auch $a_1 \vee b_1 \parallel a_3 \vee b_3$.

(affiner Satz von Pappos (von Alexandria, ca 300 n. Chr.))

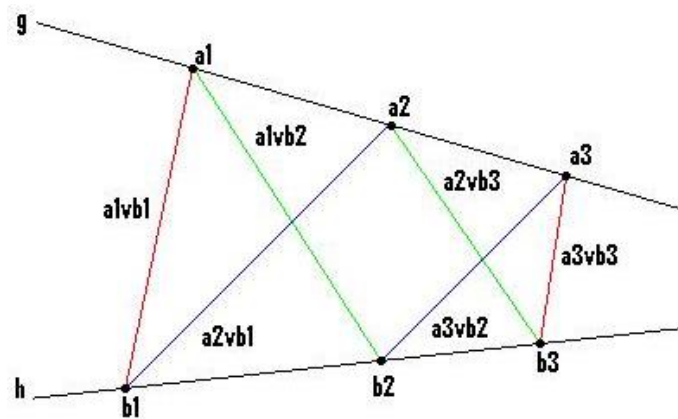


Abbildung 9: Affiner Satz von Pappos

Literatur

- [1] WAISMANN, FRIEDRICH: Anhang: Was ist Geometrie?. In CLAUS, HEINZ JÖRG (Hrsg.): Einführung in das mathematische Denken, 4. Aufl., *Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1996*, S. 126
- [2] PICKERT, GÜNTER: Ebene Inzidenzgeometrie, 3. Auflage, *Diesterweg Verlag, 1971*

Ergänzende Literatur:

- KÖCHER, MAX; KRIEG, ALOYS: Ebene Geometrie, 3. Auflage, *Springer Verlag, 2007*
- WERNER, ANETTE: Was ist algebraische Geometrie? *Goethe-Universität, Frankfurt am Main 2009*
URL: http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/werner/was_ist_alggeom/index.html
- TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN: Was ist alles Geometrie? *Technische Universität, Wien 2009*
URL: http://www.geometrie.tuwien.ac.at/dglehramt/menu2_1.php