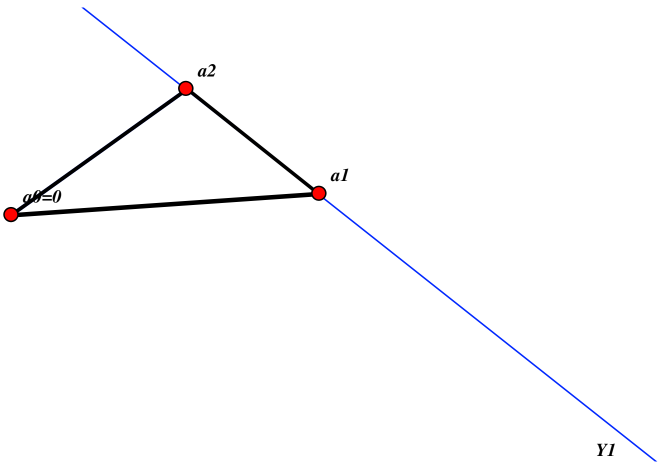
**Ein Vorschlag für die Übungsstunden am 9. und 10. Dezember 2009 war folgende Aufgabe:**

Stelle $\mathcal{C}(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)})$ aus $\mathbb{R}^2$ als Durchschnitt von Halbräumen dar mit affin unabhängigen Punkten $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$. Wir nehmen außerdem noch an, dass $a^{(0)} = 0$.




Auf Vorschlag einer Studierenden haben wir die Gerade $Y_1$ wie folgt dargestellt:

$$Y_1 = a^{(1)} + \langle a^{(2)} - a^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$$

Sei $\Delta = \mathcal{C}(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)})$. Ein Halbraum, in dem nach unserer Anschauung eigentlich die Menge $\Delta$ enthalten sein müsste ist

$$\mathcal{H}_{Y_1, -a^{(1)}} = \{ ( \underbrace{a^{(1)} + \mu(a^{(2)} - a^{(1)})}_{\text{aus } Y_1} + \underbrace{\lambda(-a^{(1)})}_{\text{Beitrag in Richtung } a^{(0)}} ) \text{ mit } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \geq 0 \}$$

Wie kann man das nun nachweisen?

Ein Punkt $y \in \mathcal{H}_{Y_1, -a^{(1)}}$, $y = a^{(1)} + \mu(a^{(2)} - a^{(1)}) + \lambda(-a^{(1)})$, lässt sich durch Umordnen wie folgt schreiben:

$$y = (1 - \mu - \lambda)a^{(1)} + \mu a^{(2)} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in R_{\geq 0}. \tag{1}$$

Lässt sich jeder Punkt aus $\Delta$ so darstellen?

Ein Punkt $x$ aus $\Delta$ hat jedenfalls eine Darstellung als Konvexkombination:

$$x = \alpha \underbrace{a^{(0)}}_{=0} + \beta a^{(1)} + \gamma a^{(2)} \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = 1 \tag{2}$$

Da $a^{(0)} = 0$, tritt $\alpha$ nur indirekt auf. Wenn $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\beta + \gamma \leq 1$, dann ist $\alpha = 1 - (\beta + \gamma) \geq 0$. Ein Vergleich von (1) und (2) zeigt, dass bei vorgegebenen $\beta, \gamma$ mit der Nebenbedingung $0 \leq \beta + \gamma \leq 1$, die Wahl

$$\mu = \gamma, \lambda = 1 - (\beta + \gamma)$$

zulässig ist und tatsächlich zu dem Punkt $x$ in (2) führt, denn es ist ja $0 \leq \beta + \gamma \leq 1$ und somit $\lambda \geq 0$.

Bemerkung: Wenn speziell $a^{(1)} = e^{(1)}, a^{(2)} = e^{(2)}$, dann ist

$$\mathcal{H}_{Y_1,-a^{(1)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-\mu-\lambda \\ \mu \end{bmatrix} : \mu, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \right\}$$

Bis hierher waren wir gekommen, nachdem wir etwa eine Stunde uns mit Fragen zur Vorlesung beschäftigt hatten.

Wie würde es weitergehen, wenn man die oben gestellte Aufgabe abschließen möchte?

Man benötigt zunächst noch die beiden weiteren Geraden

$$Y_2 = \langle a^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}}, Y_3 = \langle a^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$$

und bildet damit die analogen Halbräume

$$\mathcal{H}_{Y_2,a^{(1)}} = \{ ( \underbrace{\mu a^{(2)}}_{\text{aus } Y_2} + \underbrace{\lambda a^{(1)}}_{\text{Beitrag in Richtung } a^{(1)}} ) \text{ mit } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \geq 0 \} , \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_{Y_3,a^{(2)}} = \{ ( \underbrace{\mu a^{(1)}}_{\text{aus } Y_3} + \underbrace{\lambda a^{(2)}}_{\text{Beitrag in Richtung } a^{(2)}} ) \text{ mit } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \geq 0 \} \tag{4}$$

Wie oben erhält man (jetzt etwas leichter), dass $\Delta$ auch in diesen beiden Halbräumen also im Durchschnitt von allen dreien enthalten ist.

Ist nun $\Delta$ genau der Durchschnitt unserer drei Halbräume?

Dazu muss man sich jetzt nur noch genau ansehen, was es nach (1),(3) und (4) bedeutet, wenn ein Punkt $x$ im Durchschnitt der Halbräume liegt:

$x$ ist dann eine Linearkombination $\rho a^{(1)} + \sigma a^{(2)}$ mit nicht negativen reellen Zahlen $\rho, \sigma$ wegen (3),(4). Wenn nun wegen (1) noch zusätzlich gelten soll, dass $\rho = 1 - \lambda - \mu, \sigma = \mu$ und $\lambda \geq 0$, damit wir in $\mathcal{H}_{Y_1,-a^{(1)}}$ landen, dann folgt $0 \leq \lambda = 1-(\sigma+\rho)$ und $(\sigma+\rho) \leq 1$. Letzteres bedeutet zusammen mit der Nichtnegativität von $\rho, \sigma$, dass unser Punkt $x$ in $\Delta$ liegt.