Vorname	Name

Matrikelnummer	Geburtsdatum	Studiengang

Ich habe das Merkblatt gelesen:	Unterschrift:

1 (6 P)	2 (4 P)	3 (4 P)	4 (4 P)	5 (2 P)	6 (4 P)	Punkte Klausur

Außer bei Aufgabe (4) sind alle Antworten auf Fragen zu begründen, damit sie gewertet werden können. Deswegen sind Teilergebnisse und Ergebnisse mit Hilfe von Text so darzustellen, dass Ihr Gedankengang und/oder Ihr Rechenweg deutlich erkennbar sind/ist. Sie brauchen die Aufgabenstellungen nicht abzuschreiben. Bitte lassen Sie links und rechts einen Rand von ca 3 cm !

Maximal sind 24 Punkte in der Klausur erreichbar.

Dies sind die Aufgaben, viel Erfolg !

(1) (6P)

Die folgende affine Abbildung ist eine Projektion entlang eines Untervektorraumes U auf einen affinen Unterraum E:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; ; \; x \mapsto Ax + b \;\text{ mit }\; A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \;\text{ und }\; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(a) (1P) Bestätigen Sie, dass $Ab = 0$, $f(b) = b$ und $f(f(x)) = f(x)$ für alle x aus $\mathbb{R}^3$. Benutzen Sie dabei ohne Rechnung, dass gilt: $A^2 = A$.

(b) (2P) Es ist $f(\mathbb{R}^3) = E$. Aus der affinen Geometrie wissen wir, dass die Bilder einer affinen Basis unter f den Bildraum $f(\mathbb{R}^3)$ affin erzeugen. Bestimmen Sie entsprechend E zunächst in der Form $f(a^{(1)}) \vee f(a^{(2)}) \vee f(a^{(3)}) \vee f(a^{(4)})$ mit einer selbst gewählten affinen Basis $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ von $\mathbb{R}^3$.

(c) (2P) Ermitteln Sie danach eine Parameterdarstellung (Stützvektor plus lineares Erzeugnis) für den von Ihren Vektoren $f(a^{(1)}), f(a^{(2)}), f(a^{(3)}), f(a^{(4)})$ erzeugten affinen Unterraum und bestimmen Sie dessen Dimension.

(d) (1P) Bestimmen Sie U.

(2) (4P) In $\mathbb{R}^3$ werde folgende schwache Anordnung für Vektoren eingeführt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : \quad x \trianglelefteq y \;:\Leftrightarrow\; x_i \leq y_i \text{ für } 1 \leq i \leq 3$$

(a) (2P) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren a, b in $\mathbb{R}^3$ oder für $a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

dass die folgende Menge konvex ist:

$$M_{a,b} = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \; a \trianglelefteq v \trianglelefteq b \}$$

(b) (1P) Fertigen Sie eine ungefähre aber beschriftete Skizze für $M_{a,b}$ an mit den speziellen in (a) gegebenen Vektoren a, b.

(c) (1P) Mit einem fest vorgegebenen Vektor w aus $\mathbb{R}^3$ werde nun die Menge $w - 3M_{a,b}$[1] gebildet. Begründen Sie mit Hilfe affiner Abbildungen, dass auch die Menge $w - 3M_{a,b}$ konvex ist, wenn $M_{a,b}$ konvex ist.

....

[1] Erinnerung: $w - 3M_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x = w - 3v \text{ mit } v \in M_{a,b}\}$

(3) **(4P)**
Definition: Seien r, n natürliche Zahlen und $r \geq 2, n \geq 1$.
r Punkte $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$ aus $\mathbb{R}^n$ heißen *konvex unabhängig*, wenn die konvexe Hülle von je $r-1$ der r Punkte von der konvexen Hülle aller r Punkte verschieden ist. Ein einzelner Punkt heiße stets konvex unabhängig.

(a) (1P) Geben Sie in $\mathbb{R}^2$ vier konvex unabhängige Punkte an. (Begründung nicht vergessen!)

(b) (1P) Geben Sie in $\mathbb{R}^2$ drei paarweise verschiedene Punkte an, die nicht konvex unabhängig sind. (Begründung nicht vergessen!)

(c) (2P) Zeigen Sie (wenn Sie es vorziehen, für $n = 2$ und $r = 3$): Sind $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$ affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n$, dann sind die Punkte $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$ auch konvex unabhängig.[(2)]

(4) **(4P)**
Beurteilen Sie folgende Aussagen in den Kästchen mit $\boxed{\text{richtig}}$ oder $\boxed{\text{falsch}}$.

Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt. Jede falsche einen Minuspunkt. Keine Antwort ergibt jeweils 0 Punkte. Weniger als 0 Punkte sind nicht möglich.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Affinität (nicht notwendigerweise eine Bewegung!) und seien a, b, c affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^2$ (Ecken eines Dreiecks).

(a) f bildet stets[(3)] den Schwerpunkt der drei Punkte a, b, c ab auf den Schwerpunkt der drei Punkte $f(a), f(b), f(c)$!! $\boxed{}$

(b) f bildet stets die Höhen des Dreiecks a, b, c ab auf die Höhen des Dreiecks $f(a), f(b), f(c)$!! $\boxed{}$

(c) f bildet stets den Umkreis des Dreiecks a, b, c ab auf den Umkreis des Dreiecks $f(a), f(b), f(c)$!! $\boxed{}$

(d) f bildet stets die Seitenhalbierenden des Dreiecks a, b, c ab auf die Seitenhalbierenden des Dreiecks $f(a), f(b), f(c)$!! $\boxed{}$

(5) **(2P)** Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Man sagt, eine Teilmenge Q von K^n hat die Drei-Punkte-Eigenschaft (DPE) wenn folgendes gilt:
„Wenn drei paarweise verschiedene kollineare Punkte in Q liegen, dann liegt die ganze Gerade durch diese drei Punkte in Q."

Zeigen Sie: Wenn eine Teilmenge Q die DPE hat, dann trifft folgende Aussage zu:

Enthält Q drei paarweise verschiedene komplanare parallele Geraden, dann enthält Q die ganze von diesen parallelen Geraden aufgespannte Ebene (affine Hülle). [(4)]

(6) **(4P)**

(a) (2P) Was ist in der analytischen projektiven ebenen Geometrie der Grund dafür, dass sich zwei verschiedene projektive Geraden stets schneiden?

(b) (2P) Geben Sie zwei projektive Geraden in $\mathbb{P}^3$ an, die sich nicht schneiden.

◇ ◇

....

[(2)]Sie können ohne Beweis benutzen, dass (siehe VL/Ü) gilt $\overline{\mathfrak{C}(a^{(1)}, \ldots, a^{(r)})}^{\mathsf{aff}} = \overline{\{a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}\}}^{\mathsf{aff}}$

[(3)]d.h.: jede Affinität tut dies

[(4)]Tipp: Durch einen Punkt in der von den Parallelen aufgespannten Ebene, der nicht auf den Parallelen liegt, gibt es eine Gerade, die die Parallen schneidet .....