Modul Geometrie — Stand 12. Februar 2010

Wintersemester 2009-2010

Schmale

Lösungen und ein paar Kommentare zu ausgewählten Aufgaben

(5) (i) Behauptung: Wenn $K = \mathbb{Z}_3$, dann ist Γ ein affiner Unterraum.
Ich benutze $\mathbb{Z}_3$ in der Form $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ mit den bekannten Rechenregeln. 2 hat dabei ein multiplikatives Inverses, nämlich sich selbst, denn in $\mathbb{Z}_3$ ist ja $2 \cdot 2 = 1$. M.a.W.: $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 2$.
Nachweis der Behauptung: Wenn $\Gamma = \varnothing$, dann ist Γ ein affiner Unterraum auf Grund der Definitionen in §1. Sei nun $\Gamma \neq \varnothing$, $w \in \Gamma$ und $U = \{v - w : \ v \in \Gamma\}$. Nun zeige ich, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{Z}_3^n$, und damit $\Gamma = w + U$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{Z}_3^n$ ist:
Jedenfalls ist $0 \in U$. Mit $v - w \in U$ ist $0(v-w) \in U$, $1(v-w) \in U$ und $2(v-w) \in U$, letzteres, weil $2(v - w) = \frac{1}{2}(v - w) = \frac{1}{2}(v + w) - w$ und $\frac{1}{2}(v + w) \in \Gamma$. Mit einem Vektor $(v - w) \in U$ ist also $\mathbb{Z}_3(v - w) \subseteq U$.
Außerdem ist zu je zwei Vektoren $v-w$, $v'-w \in U$ zunächst $\frac{1}{2}(v+v') \in \Gamma$ und damit dann $\frac{1}{2}(v + v') - w = \frac{1}{2}\big((v - w) + (v' - w)\big) \in U$ und somit $(v - w) + (v' - w) \in U$. All dies zusammen ergibt, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{Z}_3^n$ ist.

Eine Alternative zu dieser Lösung ist der Nachweis, dass Γ mit je zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält. Danach kann dann Satz 1(c) in §1 angewendet werden, da ja $\mathsf{char}(\mathbb{Z}_3) \neq 2$. Diese Strategie wird nun zur Illustration beim zweiten Teil der Aufgabe verfolgt. Auch da ist $\mathsf{char}(\mathbb{Z}_5) \neq 2$.

(ii) Behauptung: Wenn $K = \mathbb{Z}_5$, dann ist Γ ein affiner Unterraum.
Ich benutze $\mathbb{Z}_5$ in der Form $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit den bekannten Rechenregeln. 2 hat dabei 3 als multiplikatives Inverses , denn in $\mathbb{Z}_5$ ist ja $2\cdot 3 = 1$. Hier ist also $\frac{1}{2} = 3$ und damit $\frac{1}{4} = 4$ und $(\frac{1}{2})^3 = 2$. Demnach gilt hier $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{(\frac{1}{2})^k : \ 0 \leq k \leq 3\}$.
Nachweis der Behauptung: Wenn $|\Gamma| = 0$ oder $= 1$, dann liegt auf jedem Fall ein affiner Unterraum vor. Sei nun $|\Gamma| \geq 2$ und seien $a, b \in \Gamma, a \neq b$. Ich möchte zeigen, dass dann stets auch die Verbindungsgerade $a + \mathbb{Z}_5(b - a)$ ganz zu Γ gehört. Nach Voraussetzung liegen die folgenden Punkte alle in Γ

$$c = \frac{1}{2}(a + b),\ d = \frac{1}{2}(a + c), e = \frac{1}{2}(a + d)$$

und man berechnet

$$c = a + 3(b - a),\ d = a + 4(b - a),\ e = a + 2(b - a)\ .$$

Da zusätzlich $a = a+0(b-a)$ und $b = a+1(b-a)$, erkennt man, dass $a+\mathbb{Z}_5(b-a) \subseteq \Gamma$. Da dies für je zwei verschiedene Punkte a, b aus Γ zutrifft, ist Γ nach Satz 1(c) in §1 ein affiner Unterraum.

(6) (a) Durch eine kurze Rechnung, die ich hier nicht ausführe, kann gezeigt werden, dass $U = \{g \in R : \ g(x_i) = 0 \text{ für } 0 \leq i \leq 2\}$ ein Untervektorraum ist von R. Wenn nun $\Gamma = \varnothing$, dann ist Γ ein affiner Unterraum. Wenn aber $\Gamma \neq \varnothing$, dann gibt es

mindestens ein f in Γ und mit diesem f weise ich nun nach, dass $\Gamma = f + U$.
Für alle $g \in U$ gilt

$$(f+g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i) = f(x_i) = c_i \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq 2 \; .$$

Daher ist $f + U$ eine Teilmenge von Γ.
Für alle $h \in \Gamma$ ist

$$(h-f)(x_i) = h(x_i) - f(x_i) = c_i - c_i = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq 2$$

und somit $h - f \in U$. Daher ist umgekehrt auch Γ eine Teilmenge von $f + U$. Es folgt $\Gamma = f + U$ mit einem Untervektorraum U. Γ ist also ein affiner Unterraum.

Der Nachweis, dass auch Λ ein affiner Unterraum von R ist, kann analog verlaufen. Zunächst ist wieder nachzurechnen, dass $W = \{g \in R : \; g''(1) = 0\}$ ein Untervektorraum von R ist. Danach zeige ich wieder genau wie oben, dass, falls $\Lambda \neq \varnothing$, mit einem $f \in \Lambda$ gilt: $\Lambda = f + W$.

(i) Für alle $g \in W$ gilt

$$(f+g)''(1) = f''(1) + g''(1) = f''(1) = 1 \; .$$

Daher ist $f + W$ eine Teilmenge von Λ.

(ii) Für alle $h \in \Lambda$ ist

$$(h-f)''(1) = h''(1) - f''(1) = 1 - 1 = 0 \; ,$$

und somit $h - f \in W$ und $h \in f + W$.
Daher ist Λ eine Teilmenge von $f + W$.

(iii) Es folgt mit (i),(ii): $\Lambda = f + W$ mit einem Untervektorraum W. Λ ist also ein affiner Unterraum von R.

(b) (i) Bestimmung von $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}} \Gamma_n$: Ein Polynom $f \in R_n$ mit $f = a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ liegt genau dann in Γ_n, wenn gilt

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1} &= c_0 \\ a_1 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= c_1 \\ a_2 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= c_2 \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \end{bmatrix}}_{=:X} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:a} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{=:c} \; . \tag{1}$$

Da die gegebenen x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden sein sollen, hat die dreizeilige (Vandermonde-) Teilmatrix X vollen Rang und das Gleichungssystem (1) hat einen $(n-3)$-dimensionalen affinen Unterraum als Lösungsmenge. Da $\Gamma_n = \mathsf{Lös}\,(X, c)$, folgt: $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}} \Gamma_n = n - 3$.

(ii) Bestimmung von $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\Delta_n$: Ein Polynom $f \in R_n$ mit $f = a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ liegt genau dann in Δ_n, wenn gilt

$$\begin{aligned} f''(1) &= (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-1})'(1) \\ &= (2a_2 + 6a_3x + \cdots + (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3})(1) \\ &= 2a_2 + 6a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)a_{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\underbrace{[2, 6, \cdots, (n-2)(n-1)]}_{=:d} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:a} = 1\ . \tag{2}$$

da $d \neq 0$, ist $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\mathsf{L\ddot{o}s}\,(d, 1) = n - 1$.

Die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to R_n, \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$ ist linear und bijektiv (Isomorphismus von Vektorräumen) und es ist $\pi(\mathsf{L\ddot{o}s}\,(d, 1)) = \Delta_n$. Daher ist $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\Delta_n = \mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\mathsf{L\ddot{o}s}\,(d, 1) = n - 1$.

Von den meisten Studierenden wurde die in der Aufgabe angebotene alternative Aufgabenstellung gewählt, bei der es um Spezialfälle mit konkret vorgegebenen Parametern ging, die mit Rechenverfahren aus der linearen Algebra bearbeitet werden konnten.

(7) (a) Die Abbildung φ bildet Paare von eindimensionalen Unterräumen ab. Sie ist aber erklärt mit Hilfe von Erzeugenden, die durch die Unterräume nicht eindeutig festgelegt sind. Wohldefiniert ist die Abbildung φ, wenn die Abbildungsvorschrift unabhängig von der Wahl der Erzeugenden stets das gleiche Ergebnis liefert. Seien daher $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3$ mit $v_3, v_3', w_3, w_3' \neq 0$ und gelte $\langle v \rangle = \langle v' \rangle, \langle w \rangle = \langle w' \rangle$. Es gibt dann $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ derart, dass $v' = \lambda v, w' = \mu w$. Setzt man nun in die Abbildungsvorschrift ein, so erhält man

$$\left(\frac{w_1'}{w_3'} - \frac{v_1'}{v_3'}, \frac{w_2'}{w_3'} - \frac{v_2'}{v_3'}\right) = \left(\frac{\mu w_1}{\mu w_3} - \frac{\lambda v_1}{\lambda v_3}, \frac{\mu w_2}{\mu w_3} - \frac{\lambda v_2}{\lambda v_3}\right) = \left(\frac{w_1}{w_3} - \frac{v_1}{v_3}, \frac{w_2}{w_3} - \frac{v_2}{v_3}\right)\ .$$

Die Abbildung φ ist also wohldefiniert.

(b) Hier ist natürlich die Definition 2 in §1 der Ausgangspunkt und es sind entsprechend die beiden Eigenschaften (A1) und (A2) nachzuweisen.

(i) Nachweis von (A1):

Für alle $p, q, q' \in M$ mit $p = \langle v\rangle, q = \langle w\rangle, q' = \langle w'\rangle, v_3, w_3, w_3' \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(p,q) = \varphi(p,q') \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{w_1}{w_3} - \frac{v_1}{v_3}, \frac{w_2}{w_3} - \frac{v_2}{v_3}\right) = \left(\frac{w_1'}{w_3'} - \frac{v_1}{v_3}, \frac{w_2'}{w_3'} - \frac{v_2}{v_3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{w_1'}{w_3'} = \frac{w_1}{w_3} \text{ und } \frac{w_2'}{w_3'} = \frac{w_2}{w_3} \\
&\Leftrightarrow \quad w_1' = \left(\frac{w_3'}{w_3}\right)w_1 \text{ und } w_2' = \left(\frac{w_3'}{w_3}\right)w_2 \text{ und } w_3' = \left(\frac{w_3'}{w_3}\right)w_3 \\
&\Leftrightarrow \quad w' = \left(\frac{w_3'}{w_3}\right)w \\
&\Rightarrow \quad \langle w'\rangle = \langle w\rangle \\
&\Rightarrow \quad q = q'
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $\varphi(p, \bullet)$ ist injektiv.
Zu gegebenen $p = \langle v\rangle \in M$ und $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich $\varphi(p,q) = z$ mit $q = \langle w\rangle$ und $w = (z_1 + \frac{v_1}{v_3}, z_2 + \frac{v_2}{v_3}, 1)$. Daher ist $\varphi(p, \bullet)$ auch surjektiv.

(ii) Nachweis von (A2):
Seien $p, q, r \in M$ gegeben mit $p = \langle v\rangle, q = \langle w\rangle, r = \langle u\rangle$. Man berechnet damit:

$$\begin{aligned}
\varphi(p,r) + \varphi(r,q) &= \left(\frac{r_1}{r_3} - \frac{v_1}{v_3}, \frac{r_2}{r_3} - \frac{v_2}{v_3}\right) + \left(\frac{w_1}{w_3} - \frac{r_1}{r_3}, \frac{w_2}{w_3} - \frac{r_2}{r_3}\right) \\
&= \left(\frac{w_1}{w_3} - \frac{v_1}{v_3}, \frac{w_2}{w_3} - \frac{v_2}{v_3}\right) \\
&= \varphi(p,q) \; .
\end{aligned}$$

(8) Eine Maple-Datei zu dieser Aufgabe, konvertiert zu einer html-Datei, finden Sie über Die Internetseite des Moduls. Falls Sie das zugrunde liegende Maple-Arbeitsblatt haben möchten, wenden Sie sich direkt an mich.

(11) Die Geraden auf denen die Punkte $a^{(i)}, i = 0, 1, 2$ verschoben werden dürfen sind

$$\Gamma_i = p + \langle a^{(i)} - p\rangle_{\mathbb{Q}}, \; i = 0, 1, 2 \; .$$

Wird $a^{(i)}$ entlang Γ_i zum neuen Punkt $b^{(i)}$ verschoben, dann muss gelten

$$b^{(i)} = a^{(i)} + \mu_i(a^{(i)} - p) \quad \text{mit} \quad \mu_i \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

Die drei Punkte sollen so verschoben werden, dass der Schwerpunkt der verschobenen Punkte genau der fest vorgegebene Punkt p ist. Dafür gibt es, wie man bei Benutzung des Applets zur Aufgabe erkennt, zahlreiche Möglichkeiten.

(a) Jetzt soll zusätzlich einer der drei Punkte festgehalten werden. O.E. sei dies der Punkt $a^{(0)}$.
Behauptung: Es gibt genau ein Paar $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Q}^2$ derart, dass gilt

$$p = \frac{1}{3}\big(\underbrace{a^{(0)}}_{=b^{(0)}} + \underbrace{(a^{(1)} + \mu_1(a^{(1)} - p))}_{=b^{(1)}} + \underbrace{(a^{(2)} + \mu_2(a^{(2)} - p))}_{=b^{(2)}}\big) \tag{4}$$

Beweis: Multiplikation von (4) mit 3 und Umordnen zeigt, dass (4) äquivalent ist mit

$$(3 + \mu_1 + \mu_2)\,(p - a^{(0)}) = (1 + \mu_1)\,(a^{(1)} - a^{(0)}) + (1 + \mu_2)\,(a^{(2)} - a^{(0)}) \tag{5}$$

Annahme: Es gibt $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}$ derart dass (5) und damit auch (4) zutrifft. Nach Voraussetzung sind die $a^{(i)}, i = 0, 1, 2$ affin unabhängig. Daher sind die Vektoren $a^{(1)} - a^{(0)}, a^{(2)} - a^{(0)}$ linear unabhängig. Wenn nun $3 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ auf der linken Seite von (5), dann folgt in (5), dass $1 + \mu_1 = 0 = 1 + \mu_2$ und daher $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Dann kann aber nicht mehr $3 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ zutreffen. Daher ist $3 + \mu_1 + \mu_2 \neq 0$ und ich erhalte in (5):

$$(p - a^{(0)}) = \frac{(1 + \mu_1)}{(3 + \mu_1 + \mu_2)} (a^{(1)} - a^{(0)}) + \frac{(1 + \mu_2)}{(3 + \mu_1 + \mu_2)} (a^{(2)} - a^{(0)}) \tag{6}$$

Wenn es also überhaupt ein Lösung für (4) gibt, dann muss die Gleichung (6) bestehen.
Da $a^{(1)} - a^{(0)}, a^{(2)} - a^{(0)}$ linear unabhängig sind, sind die Zahlen λ_1, λ_2 mit $\lambda_1\,(a^{(1)} - a^{(0)}) + \lambda_2\,(a^{(2)} - a^{(0)}) = (p - a^{(0)})$ jedoch eindeutig bestimmt und man erhält wegen (6) ein lineares Gleichungssystem für μ_1, μ_2:

$$(3 + \mu_1 + \mu_2)\lambda_1 = (1 + \mu_1)\ , \quad (3 + \mu_1 + \mu_2)\lambda_2 = (1 + \mu_2)\ .$$

In Matrixform lautet es wie folgt

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3\lambda_1 \\ 1 - 3\lambda_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Es ist eindeutig lösbar, wenn $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 1$. Wäre $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, dann wären $p, a^{(1)}, a^{(2)}$ kollinear entgegen den Voraussetzungen der Aufgabe. Damit ist gezeigt: wenn es eine Lösung $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Q}^2$ zu (4) gibt, dann ist sie durch (7) eindeutig festgelegt und sieht so aus:

$$(\mu_1, \mu_2) = \Big(\frac{2\lambda_1 - 1 + \lambda_2}{-\lambda_2 - \lambda_1 + 1}, \frac{\lambda_1 - 1 + 2\lambda_2}{-\lambda_2 - \lambda_1 + 1}\Big)$$

Nun ist noch durch Einsetzen zu bestätigen, dass mit diesen Werten tatsächlich eine Lösung von (4) entsteht.

(b) Für den Schwerpunkt der Punkte $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}$ ergibt sich

$$\frac{1}{3}(b^{(0)} + b^{(1)} + b^{(2)}) = p + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} \lambda_i (a^{(i)} - p)\ . \tag{8}$$

Wenn $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ die baryzentrischen Koordinaten des Punktes p bezüglich der affinen Basis $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}$ sind, dann gilt insbesondere $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i (a^{(i)} - p) = 0$ und man sieht in (8), dass dann tatsächlich p der Schwerpunkt der $b^{(i)}$ ist.

Es fällt auf, dass dabei die Eigenschaft $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1$ von baryzentrischen Koordinaten gar nicht benutzt wurde. Jedes Tripel $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft $\sum_{i=0}^{2} \lambda'_i (a^{(i)} - p) = 0$ führt zum selben Ergebnis:

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} \big(p + \lambda'_i (a^{(i)} - p)\big) = p\ .$$

Man kann zusätzlich noch feststellen, dass die Dreiecke $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}$ und $b'^{(0)}, b'^{(1)}, b'^{(2)}$, wenn beide Tripel den Punkt p als Schwerpunkt haben, ähnlich sind.

(12) Nach Satz 13 in §1 ist

$$\Gamma = \Big\{ \sum_{i=0}^{2} \mu_i a^{(i)} : \ \mu_i \in \mathbb{Q}, \sum_{i=0} \mu_i = 1 \Big\}$$

und

$$\Delta = \Big\{ \sum_{i=0}^{2} \lambda_i b^{(i)} : \ \lambda_i \in \mathbb{Q}, \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1 \Big\} .$$

Dabei sind, wie sich leicht nachrechnen lässt, die $a^{(i)}$ und die $b^{(i)}$ jeweils affin unabhängig.

(a) Injektivität von f: Seien $p = \sum_{i=0}^{2} \mu_i a^{(i)}, p' = \sum_{i=0}^{2} \mu_i' a^{(i)}$ und gelte

$$\sum_{i=0}^{2} \mu_i = \sum_{i=0}^{2} \mu_i' = 1 \ ,$$

dann folgt mit Beobachtung 11 in §2:

$$f(p) = f(p') \Rightarrow \sum_{i=0}^{2} \mu_i f(a^{(i)}) = \sum_{i=0}^{2} \mu_i' f(a^{(i)}) \Rightarrow \mu_i = \mu_i' \text{ für } 0 \le i \le 2 \ \Rightarrow p = p' \ ,$$

wobei die vorletzte Implikation sich mit Satz 12 (c) in §2 ergibt.
Surjektivität von f: Zu gegebenem $q = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i b^{(i)} \in \Delta$ mit $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1$ ist $f(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i a^{(i)}) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(a^{(i)}) = q$, da f eine affine Abbildung ist und somit mit Affinkombinationen verträglich ist.
$g = f^{-1}$: Es genügt die $a^{(i)}$ und die $b^{(i)}$ zu betrachten, da g und f affine Abbildungen sind. Nach Definition der beiden Abbildungen gilt für $0 \le i \le 2$:

$$(f \circ g)(b^{(i)}) = f(g(b^{(i)})) = f(a^{(i)}) = b^{(i)} \text{ und } (g \circ f)(a^{(i)}) = g(f(a^{(i)})) = g(b^{(i)}) = a^{(i)} .$$

Es folgt $f = g^{-1}$.

(b) Setzen wir $a^{(3)} := b^{(1)}, a^{(4)} := b^{(2)}$, dann ist $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ eine affine Basis von $\mathbb{Q}^4$, denn die vier Vektoren $a^{(i)} - a^{(0)}, 1 \le i \le 4$ sind linear unabhängig (kurze Rechnung!). Da eine affine Abbildung durch ihre Wirkung auf einer affinen Basis vollständig festgelegt ist, kann und muss nun h wie folgt festgelegt werden (mit $b^{(3)} := a^{(1)}, b^{(4)} := a^{(2)}$):

$$h(a^{(i)}) := b^{(i)} \text{ für } 0 \le i \le 4 .$$

h hat offensichtlich die geforderten Eigenschaften.

(c) Zu bestimmen ist die Matrix A (bezüglich Standardbasis) der zu h gehörenden linearen Abbildung ℓ. A lässt sich (z.B.) aus der folgenden Matrizengleichung berechnen:

$$\begin{aligned} & [h(a^{(1)}) - h(a^{(0)}), h(a^{(2)}) - h(a^{(0)}), h(a^{(3)}) - h(a^{(0)}), h(a^{(4)}) - h(a^{(0)})] \\ = \ & [\ell(a^{(1)} - a^{(0)}), \ell(a^{(2)} - a^{(0)}), \ell(a^{(3)} - a^{(0)}), \ell(a^{(4)} - a^{(0)})] \\ = \ & A \cdot [a^{(1)} - a^{(0)}, a^{(2)} - a^{(0)}, a^{(3)} - a^{(0)}, a^{(4)} - a^{(0)}] \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(13) Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass zwar a, b, c Vektoren sind, aber auf Grund der Formate ca und cb aus $\mathbb{Q}$ sind.

(a) Da c von 0 verschieden ist, ist Γ eine Hyperebene. Da a und b nicht in der Hyperebene Γ liegen, sind die Zahlen $(ca-d)$ und $(cb-d)$ von 0 verschieden und ein eventueller Schnittpunkt der Strecke $[a,b]$ mit Γ ist dann von a und b verschieden. Es bestehen folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} [a,b] \cap \Gamma \neq \varnothing \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in (0,1): \ c\big(\lambda a + (1-\lambda) b\big) = d \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in (0,1): \ \lambda(ca-d) = -(1-\lambda)(cb-d) \end{aligned} \tag{9}$$

Nun zum Nachweis der in der der Aufgabenstellung behaupteten Äquivalenz:
„$\Rightarrow$“: Es folgt

$$(9) \ \Rightarrow \quad \exists \lambda \in (0,1): \ (ca-d)(cb-d) = - \underbrace{\Big(\frac{1-\lambda}{\lambda}\Big)(cb-d)^2}_{>0}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist demnach negativ, m.a.W.:
es folgt $(ca-d)(cb-d) < 0$.
„$\Leftarrow$“: Gelte nun $(ca-d)(cb-d) < 0$, dann kann die Differenz $(b-a)$ nicht senkrecht auf c stehen, denn dann wäre ja $c(b-a) = 0$ und somit $cb = ca$ und damit $(cb-d)(ca-d) = (ca-d)^2 > 0$. Wenn $(ca-d)(cb-d) < 0$, dann kann also λ wie folgt festgelegt werden:

$$\lambda := \frac{cb-d}{c(b-a)} . \tag{10}$$

Mit diesem λ ergibt sich nach Einsetzen, dass $c(\lambda a + (1-\lambda)b) = d$, dass also zumindest die Gerade $a \vee b$ einen Schnittpunkt mit Γ hat. Wenn nun noch λ aus dem offenen Intervall $(0,1)$ ist, dann liegt der Schnittpunkt auf der Strecke $[a,b]$.

Mit (10) folgt

$$1 = \frac{c(b-a)}{cb-d}\lambda = \frac{(cb-d)-(ca-d)}{cb-d}\lambda = \Big(1 - \frac{ca-d}{cb-d}\Big)\lambda \tag{11}$$

Dividiert man die Ungleichung $(ca-d)(cb-d) < 0$ durch $(cb-d)^2$, so ergibt sich $\frac{(ca-d)}{(cb-d)} < 0$ und $\big(1 - \frac{ca-d}{cb-d}\big) > 1$. Damit folgt aus (11), dass λ positiv und kleiner als 1 ist, also $\lambda \in (0,1)$.

(b) Ich beziehe mich, wie die Aufgabenstellung, direkt auf das Beispiel 4 (e) in §3. Seien a, a' zwei Punkte aus $\overset{\circ}{\mathscr{H}}_{Y,v}$, etwa

$$a = p + \lambda v + y, a' = p + \lambda' v + y'$$

mit positiven reellen λ, λ' und mit $y, y' \in \overrightarrow{Y}$.

Mit α, α' aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und mit $\alpha + \alpha' = 1$ berechnet man dann für den Punkt $b = \alpha a + \alpha' a'$ der Verbindungsstrecke $[a, a']$:

$$b = \alpha a + \alpha' a' = \alpha p + \alpha\lambda v + \alpha y + \alpha' p' + \alpha'\lambda' v + \alpha' y' = p + \underbrace{(\alpha\lambda + \alpha'\lambda')}_{>0\ !} v + \underbrace{(\alpha y + \alpha' y')}_{\in \overrightarrow{Y}\ !}$$

Dabei ist erstens $(\alpha\lambda + \alpha'\lambda') > 0$, da α, α' nicht negativ und nicht beide 0 sind und da λ, λ' beide positiv sind. Und zweitens ist dabei $(\alpha y + \alpha' y')$ aus $\overrightarrow{Y}$, denn $\overrightarrow{Y}$ ist ein Untervektorraum.
Damit ist gezeigt: Ein beliebiger Punkt b der Verbindungsstrecke $[a, a']$ liegt für beliebige $a, a' \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{Y,v}$ eben falls in $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{Y,v}$. M.a.W.: $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_{Y,v}$ ist konvex.

(14) Die beiden Aufgabenteile (a) und (b) können ohne Bezug zu den vorgegebenen Punkten für drei beliebige affin unabhängig Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ bearbeitet werden. Betrachtet werden Affinkombinationen $\lambda a + \mu b + \nu c$ der drei Punkte. Jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ hat eine eindeutige Darstellung dieser Art, wenn a, b, c affin unabhängig sind. Benutzt wird im Folgenden u.A. die Möglichkeit eine solche Affinkombination in Parameterdarstellungen umzuwandeln. Es gilt nämlich

$$\lambda a + \mu b + \nu c = a + \mu(b - a) + \nu(c - a) = b + \lambda(a - b) + \nu(c - b) = c + \lambda(a - c) + \mu(b - c)\ ,$$

wobei dann jeweils die beiden verbleibenden Parameter keinen Einschränkungen mehr unterliegen.

(a) Für die Menge der Punkte $M_{a,0}$, bei denen λ verschwindet, gilt

$$M_{a,\mathbf{0}} = \{\lambda a + \mu b + \nu c :\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda \mathbf{= 0}\}$$
$$= \{\mu b + \nu c :\ \mu, \nu \in \mathbb{R}, \mu + \nu = 1\} = b \vee c\ .$$

Analog erhält man: $M_{b,0} = c \vee a$ und $M_{c,0} = a \vee b$.
Dabei wurde bisher nur benötigt, dass a, b, c paarweise verschieden sind und somit die jeweilige Verbindungsgerade gebildet werden kann.

(b) Sei $M_{a,\geq}$ die Menge der Punkte p in $\mathbb{R}^2$, in deren Affinkombination $p = \lambda a + \mu b + \nu c$ der Faktor λ nicht negativ ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned} p \in M_{a,\geq} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big[\ p = b + \lambda(a - b) + \mu(c - b) \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\lambda \geq 0}\ \Big] \\ &\Leftrightarrow \quad \Big[\ p \in b + \langle c - b\rangle_{\mathbb{R}} + \mathbb{R}_{\geq 0}(a - b)\ \Big] \end{aligned}$$

Daher ist $\boldsymbol{M_{a,\geq}} = b + \langle c - b\rangle_{\mathbb{R}} + \mathbb{R}_{\geq 0}(a - b) = \boldsymbol{\mathcal{H}_{Y,v}}$ mit $Y = b + \langle c - b\rangle_{\mathbb{R}}$ und $v = a - b$.
Als Beispiel soll nun noch die Menge $M_{>,<,>}$ der Punkte, bei denen $\lambda > 0, \mu < 0$ und $\nu > 0$ ist, als Schnitt der inneren Punkte von Halbräumen der gerade gefundenen Art dargestellt werden. Seien dazu

$$M_{a,>} := \{\lambda a + \mu b + \nu c :\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda > 0\}$$

und entsprechend $M_{b,<}, M_{c,>}$. Damit ergibt sich direkt

$$M_{>,<,>} = M_{a,>} \cap M_{b,<} \cap M_{c,>}\quad .$$

(15) **(b)** Sei $\mathcal{H}_{Y,v}$ – mit einer Hyperebene Y von $\mathbb{R}^n$ und mit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \overrightarrow{Y}$ – ein Halbraum in $\mathbb{R}^n$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Affinität mit zugehöriger linearer Abbildung $\boldsymbol{\ell}$. Sei außerdem $p \in Y$. Dann ist

$$\mathcal{H}_{Y,v} = \{p + u + \lambda v : \ u \in \overrightarrow{Y}, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}}\} = p + \overrightarrow{Y} + \mathbb{R}_{\geq 0}\, v \ .$$

Für die affine Abbildung f gilt: $f(x) = f(p) + \boldsymbol{\ell}(x - p)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der Linearität von $\boldsymbol{\ell}$ stellt man nun fest, dass

$$\begin{aligned} f(\mathcal{H}_{Y,v}) &= \{f(p + u + \lambda v) : \ u \in \overrightarrow{Y}, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}}\} \\ &= \{f(p) + \boldsymbol{\ell}(u + \lambda v) : \ u \in \overrightarrow{Y}, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}}\} \\ &= \{f(p) + \boldsymbol{\ell}(u) + \lambda \boldsymbol{\ell}(v) : \ u \in \overrightarrow{Y}, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}}\} \\ &= f(p) + \boldsymbol{\ell}(\overrightarrow{Y}) + \mathbb{R}_{\geq 0}\, \boldsymbol{\ell}(v) \end{aligned} \tag{12}$$

Da f eine Affinität ist, ist die lineare Abbildung $\boldsymbol{\ell}$ bijektiv. Daher ist $\boldsymbol{\ell}(\overrightarrow{Y})$ ebenso wie $\overrightarrow{Y}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum. und $\boldsymbol{\ell}(v))$ liegt in $\mathbb{R}^n \setminus \overrightarrow{Y}$. $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\ell}(\overrightarrow{Y}),\, v}$ ist demnach ein Halbraum und das Ergebnis in (12) besagt

$$f(\mathcal{H}_{Y,v}) = \mathcal{H}_{\boldsymbol{\ell}(\overrightarrow{Y}),\, v} \ .$$

(17) (a) Sei $j \in \{1, \ldots r\}$ und seien $c, c' \in V(a^{(j)})$. Dann gilt für $1 \leq i \leq r$:

$$\| \, c - a^{(j)} \, \| \leq \| \, c - a^{(i)} \, \| \quad \text{und} \quad \| \, c' - a^{(j)} \, \| \leq \| \, c' - a^{(i)} \, \| \ .$$

Quadrieren und Zerlegen ergibt

$$\| \, c \, \|^2 - 2(\!(c \, , a^{(j)})\!) + \| \, a^{(j)} \, \|^2 \leq \| \, c \, \|^2 - 2(\!(c \, , a^{(i)})\!) + \| \, a^{(i)} \, \|^2$$

und

$$\| \, c' \, \|^2 - 2(\!(c' \, , a^{(j)})\!) + \| \, a^{(j)} \, \|^2 \leq \| \, c' \, \|^2 - 2(\!(c' \, , a^{(i)})\!) + \| \, a^{(i)} \, \|^2$$

Subtrahieren der Längenquadrate $\| \, c \, \|^2, \| \, c' \, \|^2$ ergibt schließlich

$$-2(\!(c \, , a^{(j)})\!) + \| \, a^{(j)} \, \|^2 \leq -2(\!(c \, , a^{(i)})\!) + \| \, a^{(i)} \, \|^2 \tag{13}$$

$$-2(\!(c' \, , a^{(j)})\!) + \| \, a^{(j)} \, \|^2 \leq -2(\!(c' \, , a^{(i)})\!) + \| \, a^{(i)} \, \|^2 \tag{14}$$

Seien nun $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\lambda + \lambda = 1$, dann ergibt sich mit (13),(14)

$$-2(\!(\lambda c + \lambda c' \, , a^{(j)})\!) + \| \, a^{(j)} \, \|^2 \leq -2(\!(\lambda c + \lambda c' \, , a^{(i)})\!) + \| \, a^{(i)} \, \|^2 \ .$$

Ergänzt man nun beide Seiten mit dem gleichen Summanden $\| \, \lambda c + \lambda c' \, \|^2$ so erhält man (für $1 \leq i \leq r$) die Abschätzung

$$\| \, (\lambda c + \lambda c') - a^{(j)} \, \|^2 \leq \| \, (\lambda c + \lambda c') - a^{(i)} \, \|^2 \ ,$$

die auch ohne Exponenten gültig ist.
Damit ist gezeigt dass für $c, c' \in V(a^{(j)})$ eine Konvexkombination $\lambda c + \lambda c'$ ebenfalls in $V(a^{(j)})$ liegt. M.a.W. dass $V(a^{(j)})$ konvex ist.

(18) (a) *Behauptung:*

$$\forall_{p\in \mathcal{H}_{Y,a}}\ \forall_{q\in[p,a]} :\ \| q \| \geq \| a \|$$

Beweis: Sei $p \in \mathcal{H}_{Y,a}$, etwa $p = a + u + \lambda a = (1+\lambda)a + u$ mit $\lambda \geq 0$ und $u \in \overrightarrow{Y}$. Ein Punkt $q \in [p, a]$ hat die Dastellung

$$q = \alpha p + \beta a \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 1 \,.$$

Damit berechne ich unter Beachtung der Voraussetzung „$a \perp U$“

$$\begin{aligned}
\| q \|^2 &= \alpha^2 \| p \|^2 + 2\alpha\beta(\!(p\,,a)\!) + \beta^2 \| a \|^2 \\
&= \alpha^2\big((1+\lambda)^2 \| a \|^2 + \| u \|^2\big) + 2\alpha\beta(1+\lambda)\| a \|^2 + \beta^2 \| a \|^2 \\
&= \big(\alpha(1+\lambda) + \beta\big)^2 \| a \|^2 + \alpha^2 \| u \|^2 \\
&= \underbrace{(\underbrace{\alpha}_{\geq 0}\underbrace{\lambda}_{\geq 0} + 1)^2}_{\geq 1} \| a \|^2 + \underbrace{\alpha^2 \| u \|^2}_{\geq 0} \geq \| a \|^2 \,.
\end{aligned}$$

Es folgt: $\| q \| \geq \| a \|$.
Behauptung:

$$\forall_{p\,\in\,\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}_{Y,a}} :\ \exists_{q\in[p,a]} :\ \| q \| < \| a \|$$

Beweis: $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}_{Y,a}$ hat wie zuvor die Darstellung $p = a + u + \lambda a = (1+\lambda)a + u$, aber jetzt mit $\lambda < 0$. Ich suche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\alpha + \beta = 1$ derart, dass mit $q = \alpha p + \beta a$ gilt: $\| q \| < \| a \|$. Dieselbe Rechnung wie eben ergibt

$$\| q \|^2 = (\alpha\lambda + 1)^2 \| a \|^2 + \alpha^2 \| u \|^2 = 2\alpha\lambda \| a \|^2 + \alpha^2\big(\lambda^2 \| a \|^2 + \| u \|^2\big) + \| a \|^2$$

mit $\lambda < 0$. Die Annahme, dass (was aber ja zu zeigen ist) $\| q \|^2 < \| a \|^2$, führt zu folgender Wahl von α:

$$0 < \alpha < -2\lambda\Big(\underbrace{\frac{\| u \|^2}{\| a \|^2} + \lambda^2}_{>0 \text{ wenn } q\neq a\,!} \Big)^{-1}$$

Mit einem solchen α kann nun noch bestätigt werden, dass tatsächlich gilt: $\| q \| < \| a \|$.

(b) Die Voraussetzung $0 \notin \overline{C}$ ist überflüssig, da ja schon oben vorausgesetzt ist, dass a nicht aus U ist und somit nicht 0 sein kann und somit auch 0 nicht in C liegen kann, da das Infimum aller Längen bei a angenommen wird. Ist p ein Punkt in C, dann ist $\| q \| \geq \| a \|$ für alle $q \in [p, a]$ auf Grund der Wahl von a. Mit Hilfe von Aufgabenteil (a) erkennt man nun, dass p aus $\mathcal{H}_{Y,a}$ ist. Da dies für jeden Punkt aus C zutrifft, folgt $C \subseteq \mathcal{H}_{Y,a}$.

(19) Nur einige Teile, wo begriffliche Klärungen notwendig waren.

(a) ℓ_A ist insbesondere eine affine Abbildung. Da $\det A = 1$, ist ℓ_A bijektiv und somit eine (spezielle) Bewegung. Da ${}^{\mathsf{t}}AA$ = Einheitsmatrix, ist ℓ_A eine üblicherweise in der linearen Algebra „orthogonal“ genannte Abbildung. Die Zeilen und die Spalten von A bilden jeweils eine ortho*normierte* Basis von $\mathbb{R}^{1\times 2}$ bzw. von $\mathbb{R}^{2\times 1}$, kurz: von $\mathbb{R}^2$. Bei orthogonalen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ gibt es zwei Typen:

Drehungen: $\det A = 1$
Spiegelungen: $\det A = -1$

ℓ_A ist eine Drehung. Der Drehwinkel kann mit Hilfe der Darstellung von A als

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

mit $\alpha \in [0, \pi]$ gewonnen werden.

(b) Man kann, motiviert durch eigene geometrische Anschauung direkt eine geeignete Winkelhalbierende als Spiegelungsachse festlegen und die entsprechende Spiegelung bestimmen.

Im Folgenden wird der Kontext etwas ausführlicher und umfangreicher dargelegt. Gemäß Beispiel 3(f) in §2 erfordert eine allgemeine affine Spiegelung in K^2 eine Gerade $\Gamma = a + U$, an der gespiegelt wird und eine Richtung W, entlang derer gespiegelt wird. Dabei ist gefordert: $U \oplus W = K^2$. Wenn $K = \mathbb{R}$, dann betrachtet man üblicherweise nur „orthogonale“ Spiegelungen entlang des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U. Soll in letzterem Fall bei einer Spiegelung σ an einer Geraden durch 0 ein gegebener Vektor u auf einen weiteren gegebenen Vektor w abgebildet werden (w, u sind dabei nach Voraussetzung linear unabhängig), so ist dadurch die Gerade Γ festgelegt. Sei etwa $\Gamma = \langle v \rangle$ und $\| v \| = 1$. Sei v' orthogonal zu v und $\| v' \| = 1$. Dann hat u eine eindeutige Darstellung bezüglich der orthonormierten Basis v, v':

$$u = r_1 v + r_2 v' \; .$$

Es soll gelten $\sigma(u) = w = r_1 v - r_2 v'$. In Matrixform lässt sich das so ausdrücken:

$$[u, w] = [v, v'] \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_1 \\ r_2 & -r_2 \end{bmatrix}}_{=:R} \tag{15}$$

Dabei ist $\det R = -2r_1 r_2$ nicht 0, denn $r_1 = 0$ impliziert $u = -w$ und $r_2 = 0$ impliziert $u = w$. Beides widerspricht der linearen Unabhängigkeit von u, w. Aus (15) erhält man

$$[v, v'] = [u, w] \begin{bmatrix} r_2 & r_1 \\ r_2 & -r_1 \end{bmatrix} \frac{1}{2r_1 r_2}$$

oder

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2r_1}(u + w) \\ v' &= \frac{1}{2r_2}(u - w) \; . \end{aligned}$$

Bereits dadurch ist Γ festgelegt. Da außerdem v, v' die Länge 1 haben sollten, ergibt sich noch

$$|r_1| = \frac{1}{2} \| u + w \| , \; |r_2| = \frac{1}{2} \| u - w \|$$

und damit

$$v = \pm \frac{u + w}{\| u + w \|} , \; v' = \pm \frac{u - w}{\| u - w \|} \; .$$

Ich wähle jeweils + als Vorzeichen und setze zur Abkürzung

$$\lambda = \| u + w \| , \; \nu = \| u - w \| \; .$$

Damit ist

$$[v, v'] = [u, w] \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \nu^{-1} \\ \lambda^{-1} & -\nu^{-1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Man kann nun mit Kenntnissen aus der linearen Algebra die Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis (z.B.) wie folgt bestimmen: Bezüglich der Orthonormalbasis v, v' hat σ die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Basiswechsel mit der orthogonalen Matrix $P = [v, v']$ ergibt mit Hilfe von (16):

$$P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} {}^{\mathsf{t}}P = [u, w] \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \nu^{-1} \\ \lambda^{-1} & -\nu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} {}^{\mathsf{t}} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \nu^{-1} \\ \lambda^{-1} & -\nu^{-1} \end{bmatrix} {}^{\mathsf{t}}[u, w] \ .$$

Daraus kann eine explizite Formel gewonnen werden.

(c) Spezialisierung der Ergebnisse in (b) ergibt (i.W. durch Einsetzen) die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \ .$$

(23) *Zusätzliche Erläuterungen zur Aufgabenstellung:* Ziel dieser Aufgabe ist es, an einem einfachen Beispiel deutlich zu machen, wie eine affine Punktwanderung aus der dynamischen Dreiecksgeometrie mit „Ausreißerpunkt“ projektiv erfasst werden kann. Dabei gibt es in der Regel stets eine geometrische Interpretation und eine analytische Beschreibung für das Verschwinden und das Wiederauftauchen des wandernden Punktes. Typischerweise hat dann die projektive Fassung keinen (projektiven) „Ausreißerpunkt“ mehr. Im vorliegenden Beispiel dreht sich beim affinen 0-Durchgang nach der Einbettung in den $\mathbb{R}^3$ der entsprechende Strahl in seiner planaren Drehbewegung „unbehindert“ weiter. In welcher Ebene dreht sich der Strahl? Wie erklärt sich das Verschwinden und das Wiederauftauchen bei der affinen Konstellation nun im projektiven Kontext?

(25) Im Aufgabentext sind zwei Schreibfehler enthalten: $e^{(0)}, \dots, e^{(n)}$ ist kanonische Basis von K^{n+1} und nicht von $\mathbb{P}^n_K$. Außerdem ist $\mathsf{dim}\ \mathcal{P}_n = -1$ und nicht 0.

(a) Behauptung: Für $0 \le i < j \le n$ ist $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing$.
Beweis: Wenn es einen Punkt $p \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$ gäbe, dann müsste es in p Vektoren v, v' geben derart, dass $v_i = 1$ und $v'_j = 1, v'_i = 0$. Außerdem müsste es aber auch ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben derart, dass $v = \lambda v'$ und damit insbesondere auch $v_i = 1 = \lambda v'_i = 0$, was offensichtlich unmöglich ist.
Behauptung: $\mathbb{P}^n_K = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{A}_i$.
Beweis: Sei $p \in \mathbb{P}^n_K$, etwa $p = \langle v \rangle_K$. Sei $i = \min\{j : \ v_j \neq 0\}$. Dann ist $p \in \mathcal{A}_i$ und somit auch $p \in \bigcup_{i=0}^n \mathcal{A}_i$. Es folgt $\mathbb{P}^n_K \subseteq \bigcup_{i=0}^n \mathcal{A}_i$. Da sowieso schon $\mathcal{A}_i \subseteq \mathbb{P}^n_K$ für $0 \le i \le n$, folgt auch die umgekehrte Inklusion.

(b) Für $0 \le i \le n$ ist $\mathcal{P}_i = \mathbb{P}^n_K \setminus \bigcup_{j=0}^i \mathcal{A}_j$ und es gilt für $p \in \mathcal{P}_i$

$$p \in \mathcal{P}_i \Leftrightarrow p \notin \mathcal{A}_j \ \text{ für } \ 0 \le j \le i \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{v \in p} : \ v_0 = \dots = v_i = 0$$

Daher ist $U(\mathcal{P}_i) = \{v \in K^{n+1} : \ v_0 = \dots = v_i = 0\}$ ein $(i+1)$-dimensionaler Untervektorraum von K^{n+1} und somit $\mathcal{P}_i$ ein projektiver Unterraum der Dimension i. Man sieht zugleich, dass $\mathsf{dim}_K \mathcal{P}_0 = n-1$ und $\mathsf{dim}_K \mathcal{P}_n = -1$ und dass die Dimension jeweils um 1 zunimmt, wenn i um 1 abnimmt.