Seien K ein Körper und $K[\,t\,]$ ein Polynomring.

10.9. Definition. Seien $A \in K^{n\times n},\ A = \big(a_{ij}\big)$ und E die $n \times n$-Einheitsmatrix.

(a)

$$A - tE = \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - t \end{bmatrix} \in K[t]^{n\times n}$$

heisst **charakteristische Matrix** zu A.

(b) Das Polynom

$$\chi_A := \mathsf{det}\big(A - tE\big) \text{ aus } K[\,t\,]$$

heißt **charakteristisches Polynom** der Matrix A.

Nach 10.8 sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A genau die Eigenwerte von A.

10.10 Beobachtung. Es ist $A - tE = \big[A_{\bullet,1} - te^{(1)}, A_{\bullet,2} - te^{(2)}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\big]$ und damit auf Grund der n-fachen Linearität von det

$$\boxed{\chi_A = \mathsf{det}\,(A - tE) =}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathsf{det}\,\big[\,A_{\bullet,1}, A_{\bullet,2} - te^{(2)}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\,\big] - \mathsf{det}\,\big[\,e^{(1)}, A_{\bullet,2} - te^{(2)}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\,\big] \cdot t \\
&= \mathsf{det}\,\big[\,A_{\bullet,1}, A_{\bullet,2}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\,\big] - \mathsf{det}\,\big[\,A_{\bullet,1}, e^{(2)}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\,\big] \cdot t \\
&\quad -\mathsf{det}\,\big[\,e^{(1)}, A_{\bullet,2}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\,\big] \cdot t + \mathsf{det}\,\big[\,e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, A_{\bullet,n} - te^{(n)}\,\big] \cdot t^2 \\
&\ \ \vdots \\
&= \underbrace{\mathsf{det}\,\big[\,A_{\bullet,1}, \ldots, A_{\bullet,n}\big]}_{=\mathsf{det}\,A} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathsf{det}\,\big[\,A_{\bullet,1}, \ldots, \overbrace{e^{(k)}}^{k\text{-te Spalte}}, \ldots, A_{\bullet,n}\big]}_{=\mathsf{det}\,A_{kk}(\text{ vgl. 5.19 })}\Big) \cdot (-t) + \cdots
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots + \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathsf{det}\,\underbrace{\big[\,e^{(1)}, \ldots, A_{\bullet,k}, \ldots, e^{(n)}\big]}_{e^{(k)}\text{ ersetzt durch } A_{\bullet,k}}}_{=a_{kk}}\Big)}_{=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}} \cdot (-t)^{n-1} + \mathsf{det}\,E \cdot (-t)^n$$

$$\boxed{= \mathsf{det}\,A + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{Spur}A \cdot t^{n-1} + (-1)^n t^n}$$

Dabei ist $\mathsf{Spur}A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

10.11 Wichtige Regel. Für alle $P \in Gl(n;K)$ ist $\boxed{\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A}$.

10.12 Beispiel n=2. Dann ist $\chi_A = \mathsf{det}\,A - \mathsf{Spur}A \cdot t + t^2$. Wenn $2 := 2 \cdot 1_K \neq 0$ in K und es ein Element α gibt derart, dass $\alpha^2 = (\mathsf{Spur}A)^2 - 4\mathsf{det}\,A$, dann hat man wie üblich die Nullstellen in der Form

$$\mu_{1,2} = 2^{-1}\big(\mathsf{Spur}A \pm \sqrt{(\mathsf{Spur}A)^2 - 4\mathsf{det}\,A}\big)$$

Dabei ist $\mu_1 = \mu_2$ genau dann, wenn $\alpha = 0$.

(a) Seien etwa $K = \mathbb{R}$ und $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, dann ist $\chi_A = t^2 + 1$ und $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$. Da hier L_A einer Drehung um 90° entspricht, kann es ja auch keinen Vektor geben, dessen Richtung erhalten bleibt.

(b) Sei $2 := 2 \cdot 1_K \neq 0$ und gelte $a^2 + b^2 \neq 0$ für die Skalare $a, b \in K$. Seien weiter $d = a^2 + b^2$ und $A = d^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{bmatrix}$. Jetzt ist $\chi_A = -1 + t^2 = (t+1)(t-1)$ und $\sigma_K(A) = \{-1, 1\}$.

Man berechnet $\mathsf{Eig}\,(A; 1) = \langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rangle_K, \mathsf{Eig}\,(A; -1) = \langle \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \rangle_K$. L_A ist die Spiegelung an der Graden $\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rangle_K$. $\mathfrak{A} = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \right)$ ist eine Basis aus Eigenvektoren und man erhält $M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(L_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Seien $K = \mathbb{C}$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, dann ist $\chi_A = (t-2)^2$ und $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{2\}$.

Man berechnet $\mathsf{Eig}\,(A; 2) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$. Es gibt keine Basis von Eigenvektoren von A bzw. L_A.

(d) Seien $K = \mathbb{C}$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, dann ist $\chi_A = t^2 - 2t + 2$ und $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{1+i, 1-i\}$.

Man berechnet $\mathsf{Eig}\,(A; 1+i) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}, \mathsf{Eig}\,(A; 1-i) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$. $\mathfrak{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right)$ ist eine Basis aus Eigenvektoren und man erhält $M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(L_A) = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$

10.13. Beispiele. Wir benutzen die Matrix aus dem in 10.1 erwähnten Beispiel.

Dort ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Das charakteristische Polynom kann hier mit einem Entwicklungssatz, aber auch mit elementaren Umformungen berechnet werden. Letzteres ist vor allem bei größeren Matrizen i.A. vorteilhafter. Oft tritt dann schon eine Teilzerlegung auf.
Man erhält $\chi_A = (t^2+3)(t^2+1)$ und $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$. Die entsprechenden Eigenräume sind

$$\mathsf{Eig}\,(A; i) = \langle \begin{bmatrix} i \\ i \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}, \mathsf{Eig}\,(A; -i) = \langle \begin{bmatrix} i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}, \mathsf{Eig}\,(A; i\sqrt{3}) = \langle \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}, \mathsf{Eig}\,(A; -i\sqrt{3}) = \langle \begin{bmatrix} -i \\ i \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Sind die berechneten vier Erzeuger der Eigenräume linear unabhängig ?

Dies ergibt sich mit Hilfe des nachfolgenden Satzes 10.14. Wir haben damit eine Eigenvektorbasis gefunden und können A diagonalisieren.

$$\text{Mit } \mathfrak{A} = \left(\begin{bmatrix} i \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ i \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right) \text{ ist } M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(L_A) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

10.14 Satz. Eigenraum und Diagonalisierbarkeit.
Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $L : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\mathsf{dim}_K V = n$.

(a) $\mathsf{dim}_K \mathsf{Eig}\,(L; \mu) \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in \sigma_K(L)$

(b) Sind $v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}$ Eigenvektoren von L zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\mu_1, \ldots, \mu_m$ aus K. Dann ist $\left(v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\right)$ eine linear unabhängige Familie.

(c) Sei $\sigma_K(L) = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ mit paarweise verschiedenen $\mu_1, \ldots, \mu_r$ aus K und sei $\mathfrak{A}_i = \left(v^{(i,1)}, \ldots, v^{(i,n_i)}\right)$ eine Basis von $\mathsf{Eig}\,(L, \mu_i)$ für $1 \leq i \leq r$. Dann ist

$$\left(v^{(1,1)}, \ldots, v^{(1,n_1)}, \ldots\ldots, v^{(r,1)}, \ldots, v^{(r,n_r)}\right) \text{ eine Basis von } \mathsf{Eig}\,(L) := \sum_{i=1}^{r} \mathsf{Eig}\,(L; \mu_i)$$

Insbesondere ist

$$\mathsf{dim}_K \mathsf{Eig}\,(L) = \sum_{i=1}^{r} \mathsf{dim}_K \mathsf{Eig}\,(L; \mu_i)$$

(d) Es besteht folgender Zusammenhang:

$$\mathsf{Eig}\,(L) = V \Leftrightarrow V \text{ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren } \Leftrightarrow L \text{ ist diagonalisierbar}$$