11.18. Wie sehen orthogonale 2×2-Matrizen aus ?

(a) **Behauptung:**

$$A \in \mathcal{O}(2) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : [A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ oder } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}] \textbf{ und } a^2 + b^2 = 1$$

Beweis: Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(2)$.

$A^{\mathsf{t}}A = E_2$ bedeutet $\boxed{a^2 + b^2 = 1,\ ac + bd = 0,\ c^2 + d^2 = 1}$

${}^{\mathsf{t}}AA = E_2$ bedeutet $\boxed{a^2 + c^2 = 1,\ ab + cd = 0,\ b^2 + d^2 = 1}$

Es folgt: $b = \pm c,\ a = \pm d$ also: $d = \pm a$. Wenn $d = a$: dann $c = -b$. Wenn $d = -a$: dann $c = b$.
Umgekehrt rechnet man nach, dass solche Matrizen orthogonal sind.

(b) **Geometrische Interpretation von $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ und $a^2 + b^2 = 1$:**
Dann ist $\mathsf{det}\, A = -1$ und $\sigma(A) = \{1, -1\}$, denn

$$\mathsf{det}\,(A - tE) = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1 = (t+1)(t-1).$$

A ist demnach diagonalisierbar. Man berechnet für $b \neq 0$:

$$W := \mathsf{Eig}_{\mathbb{R}}(A, 1) = \langle \begin{bmatrix} b \\ 1 - a \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } \mathsf{Eig}_{\mathbb{R}}(A, -1) = \langle \begin{bmatrix} b \\ -1 - a \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \ .$$

L_A ist die **Spiegelung an W.** Für $b = 0$ ist $W = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Sonderfall: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Hier ist $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ und $W = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Beachte: A ist im Sonderfall eine 2×2-Permutationsmatrix.

(c) **Geometrische Interpretation von $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$:**
Sei $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor der Länge 1, also mit $x^2 + y^2 = 1$. Auch $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ hat die Länge 1 und es ist

$$(\!(\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})\!) = (\!(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ax + by \\ -bx + ay \end{bmatrix})\!) = a(x^2 + y^2) = a = \cos \underbrace{\measuredangle(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})}_{=:\varphi}$$

Für Letzteres siehe oben „Winkel in der Ebene“ oder z.B. [F] S. 276. Offensichtlich ist φ unabhängig von $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

L_A ist die **Drehung um φ gegen den Uhrzeigersinn** (vgl. [F], S. 106-107).
Beachte: Wenn $a = \cos\varphi$ und $a^2 + b^2 = 1$, dann ist $b = \pm \sin\varphi$. Man berechnet noch: $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{a + ib, a - ib\} = \{\text{Eigenwerte von } A \text{ in } \mathbb{C}\}$. Fasst man die reelle Matrix A als komplexe Matrix auf, so erhält man für $b \neq 0$ in $\mathbb{C}$ die Eigenräume

$$\mathsf{Eig}_{\mathbb{C}}(a + ib) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}} \quad , \mathsf{Eig}_{\mathbb{C}}(a - ib) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{C}} \, .$$