§ 4 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition 4.1: Seien R ein kommutativer Ring und $m, n \in R$. Gegeben seien $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ und $b = {}^{\mathsf{t}}[b_1, \ldots, b_m] \in R^{m\times 1}$. Gesucht ist ein Vektor $x = {}^{\mathsf{t}}[x_1, \ldots, x_n] \in R^{n\times 1}$ derart, dass gilt:

$$\boxed{A\,x = b} \tag{1}$$

Da der Vektor x zunächst ja noch unbekannt ist, spricht man vom Vektor der Unbekannten oder Unbestimmten oder Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und nennt (1) ein **lineares Gleichungssystem** mit der **Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$** und dem Vektor der **rechten Seiten $\boldsymbol{b}$** .

Das Anschreiben eines solchen LGS ist immer verbunden mit der Aufforderung, die Lösungsmenge

$$\boxed{\mathsf{Lös}(A, b) := \{v \in R^{n\times 1} : \quad Av = b\ \}}$$

zu bestimmen, also die Menge derjenigen Vektoren $v \in R^{n\times 1}$, die in (1) für x eingesetzt die Gleichung (1) erfüllen. Der Name 'Gleichungssystem' rührt daher, dass die Gleichung (1) ausgeschrieben wie folgt lautet

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ohne die Matrizenklammern erhält man die (zumindest für $R = \mathbb{Q}$ und $m = n = 2$) vertraute Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3}$$

(1), (2) und (3) sind nur verschiedene Darstellungsformen desselben linearen Gleichungssystems. Für die mathematische Analyse in der linearen Algebra, aber auch für die Anwendungen, wo m, n sehr groß sein kann, ist die Matrizenschreibweise zweckmäßig.

Sprechweisen: Wenn $b = 0$, dann spricht man in (1), (2) und (3) von einem **homogenen** LGS, ansonsten von einem **inhomogenen** LGS.

Beispiel 4.2: Seien $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 4}$,
$v^{(1)} = {}^{\mathsf{t}}[1, 1, 1, 1], v^{(2)} = {}^{\mathsf{t}}[1, 0, -2, 2]$, $b^{(1)} = {}^{\mathsf{t}}[4, 10, 14]$, $b^{(2)} = {}^{\mathsf{t}}[-2, 2, 0]$.

Dann ist $v^{(1)} \in \mathsf{Lös}(A, b^{(1)})$, $v^{(2)} \in \mathsf{Lös}(A, b^{(2)})$, aber $v^{(1)} \notin \mathsf{Lös}(A, b^{(2)})$ und $v^{(2)} \notin \mathsf{Lös}(A, b^{(1)})$.

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir bereits alle Hilfsmittel entwickelt, um LGS-e systematisch zu bearbeiten. Ausgangspunkt ist

Satz 4.3: Bezeichnungen wie in Definition 1. Seien außerdem $P \in GL(m; R)$ und $Q \in GL(n; R)$.
Dann gilt:

(a) $\mathsf{Lös}(A, b) = \varnothing \;\Leftrightarrow\; \mathsf{Lös}(PAQ, Pb) = \varnothing$

(b) Wenn $\mathsf{Lös}(A, b) \neq \varnothing$, dann ist $\mathsf{Lös}(PAQ, Pb) \neq \varnothing$ und

$$\mathsf{Lös}(A, b) = Q \cdot \mathsf{Lös}(PAQ, Pb) := \{Q\,w : \; w \in \mathsf{Lös}(PAQ, Pb)\}\ .$$

Insbesondere ist

$$\mathsf{Lös}(A, b) = \mathsf{Lös}(PA, Pb)\ .$$

(c) Wenn $\mathsf{Lös}(A, b) \neq \varnothing$, dann ist für beliebiges $u \in \mathsf{Lös}(A, b)$

$$\mathsf{Lös}(A, b) = u + \mathsf{Lös}(A, 0) := \{u + w \;:\quad w \in \mathsf{Lös}(A, 0)\}\ .$$

Die einzige Schwierigkeit beim Beweis dieses Satzes ist das noch ungewohnte 'Rechnen' mit Mengen, das wir bei dieser Gelegenheit üben.

Beweis von Satz 4.3
(a) und (b): Sei $v \in R^{n\times 1}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} v \in \mathsf{Lös}(A,b) \quad &\Leftrightarrow \quad Av = b \quad \Rightarrow \quad PAQ(Q^{-1}v) = Pb \quad \Leftrightarrow \quad Q^{-1}v \in \mathsf{Lös}(PAQ, Pb) \\ &\Rightarrow \quad \underbrace{Q(Q^{-1}v)}_{=v} \in Q\ \mathsf{Lös}(PAQ, P) \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\mathsf{Lös}(A,b) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Lös}(PAQ, Pb) \neq \varnothing \tag{4}$$

und falls $\mathsf{Lös}(A,b) \neq \varnothing$:

$$\mathsf{Lös}(A,b) \subseteq Q \cdot \mathsf{Lös}(PAQ, Pb) \tag{5}$$

Da die invertierbaren Matrizen P, Q frei wählbar sind und auch A, b beliebig sind, können wir (4) und (5) auch mit den Matrizen PAQ, Pb, P^{-1}, Q^{-1} an Stelle von A, b, P, Q erhalten und deswegen gilt dann auch

$$\mathsf{Lös}(PAQ, Pb) \subseteq \mathsf{Lös}(P^{-1}(PAQ)Q^{-1}, P^{-1}(Pb)) = \mathsf{Lös}(A,b)$$

und somit gilt "$\Leftarrow$" in (4) und "$\supseteq$" in (5).
(c) $\underline{\supseteq}$: Für $u \in \mathsf{Lös}(A,b)$, $w \in \mathsf{Lös}(A,0)$ ist $A(u+w) = Au + Aw = Au + 0 = b$. Damit folgt die Inklusion $\supseteq$.
$\underline{\subseteq}$: Wenn auch $v \in \mathsf{Lös}(A,b)$ dann ist $A(v-u) = 0$ bzw.$v - u \in \mathsf{Lös}(A,0)$ und mit $w = v - u$ ergibt sich $v = u + w \in u + \mathsf{Lös}(A,0)$. Damit folgt die Inklusion $\subseteq$.

Bemerkung 4.4: Der für alle kommutativen Ringe gültige Satz 4.3 ist für spezielle Ringe Grundlage für praktische Lösungsverfahren. Hier in der linearen Algebra verfolgen wir dies weiter für Körper. Mit Beispielen wird auf die anders geartete Situation insbesondere über dem Ring der ganzen Zahlen hingewiesen. Mehr zu Verfahren über den ganzen Zahlen oder Polynomen finden Sie z.B. in meinem Skript zur Linearen Algebra 2 und unter den Stichworten "Hermiteform", "Smithform" und deren "Berechnung".[1]

Beispiel 4.5:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 3}$. Mit $P = \underbrace{\underbrace{Q_2^1(-2)}_{\in \mathbb{Z}^{2\times 2}} \cdot \underbrace{Q_1^2(-1)}_{\in \mathbb{Z}^{2\times 2}}}_{\text{invertierbar!}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ gilt $PA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{über } \mathbb{Z} \\ \text{nicht normierbar}}} =: B$

<u>weiter über $\mathbb{Z}$:</u> Mit $Q = Q_1^2(-1)Q_1^3(1)P_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ gilt[2]

$$PAQ = BQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} =: C\,.$$

Sei nun $b \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$. Dann ist $Pb = \begin{bmatrix} b_1 - b_2 \\ -2b_1 + 3b_2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} =: c$

Satz 4.3 besagt jetzt

$$\boxed{\mathsf{Lös}(A,b) = Q\ \mathsf{Lös}(C,c)}$$

und man erkennt, dass $\mathsf{Lös}(C,c)$ nur dann nicht leer ist, wenn 5 ein Teiler von c_2 ist!

<u>über $\mathbb{Q}$:</u> Mit $P' = Q_1^2(1)S_2(\frac{1}{5})P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ist $P'A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{red. ZSF}}$ und mit $b \in \mathbb{Q}^{2\times 1}$ ist

$P'b = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}b_1 - \frac{2}{5}b_2 \\ -\frac{2}{5}b_1 + \frac{3}{5}b_2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} =: d.$

[1] Eine gute Quelle zum Nachschlagen für berechnungsnahe mathematische Themen ist: http://mathworld.wolfram.com/
[2] **Vorsicht:** bei Multiplikation von rechts wirken die Elementarmatrizen anders als von links!

Das neue LGS $\boxed{(P'A)x = d}$ lautet ausgeschrieben wie folgt:

$$\left.\begin{array}{rcl} & \overset{\text{frei wählbar}}{\downarrow} & \\ \boldsymbol{x_1} + \quad x_2 & + \ 0 & = d_1 \\ & \boldsymbol{x_3} & = d_2 \end{array}\right\} \qquad \text{oder} \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = d_1 - x_2 \\ x_3 = d_2 \end{array}\right.$$

Man erhält damit die Menge der Lösungen als

$$\mathsf{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 - t \\ t \\ d_2 \end{bmatrix} : t \in Q \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5}b_1 - \frac{2}{5}b_z - t \\ t \\ -\frac{2}{5}b_1 + \frac{3}{5}b_2 \end{bmatrix} : \ t \in \mathbb{Q} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{=:\, u \in \mathsf{Lös}(A,b)} + \underbrace{\left\{ t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \ t \in \mathbb{Q} \right\}}_{= \mathsf{Lös}(A,0)!}$$

Satz 4.6: Lösung eines LGS, das bereits in reduzierter Zeilenstufenform vorliegt.
Sei $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ in reduzierter ZSF und $d \in R^{m \times 1}$. Sei r die Anzahl der Zeilen $\neq 0$ von B.

(a) $\boldsymbol{r = m}$ **:**, dann ist $m \leq n$ und mit den Bezeichnungen aus 3.14 erhält man mit $J = \{j_1, ..., j_r\}$ und der komplementären Menge $\overline{J} = I_n \backslash J$

$$\mathsf{Lös}(B,d) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} : \quad v_k \in R \text{ für } k \in \overline{J} \ \text{ und } \ v_{j_i} = d_i - \sum_{\substack{k = j_i + 1 \\ k \in \overline{J}}}^{n} b_{ik} v_k \text{ für } 1 \leq i \leq r \right\}^{3}$$

Wenn speziell noch $r = m = n$, dann ist $B = E_m$ und

$$\mathsf{Lös}(E_m, d) = \{d\}$$

(b) $\boldsymbol{r < m}$ **:** Dann gilt:

$$\mathsf{Lös}(B,d) \neq \varnothing \iff d_{r+1} = \cdots = d_m = 0 \ .$$

Wenn $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$, dann ergibt sich $\mathsf{Lös}(B,d)$ wie in (a).

Wenn speziell $r = n$, dann ist $B = \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\mathsf{Lös}(B,d) = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$, <u>falls</u> $d_{r+1} = \cdots = d_1 = 0$.

Beispiel 4.7 (vgl. auch Beispiel 4.5)**:**

(a) Gegeben seien $B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & 0 & b_{14} & b_{15} \\ 0 & 0 & 1 & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$ und $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ hier sind $j_1 = 1, j_2 = 3$.

In Satz 4.6 liegt der Fall (a) vor und wir erhalten:

$$\mathsf{Lös}(B,d) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} : \quad v_2, v_4, v_5 \in R, \quad \begin{array}{l} v_1 = d_1 - b_{12}v_2 - b_{14}v_4 - b_{15}v_5, \\ v_3 = d_2 \qquad\qquad - b_{24}v_4 - b_{25}v_5 \end{array} \right\}$$

(b) Gegeben seien $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$. Jetzt liegt der Fall (b) vor.

Lösungen gibt es nur, wenn $d_3 = 0$, und dann ist

$$\mathsf{Lös}(B,d) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \quad v_3 \in R, \quad \begin{array}{l} v_1 = d_1 - b_{13}v_3, \\ v_2 = d_2 - b_{23}v_3 \end{array} \right\} .$$

[3] Wenn $j_r = n$, dann wird die Summe als 0 festgelegt und es ist $v_n = d_r$.