Notizen zu §6 ab 6.15.

Vorweg sei nochmals daran erinnert, dass Vektorräume nichts anderes sind als Moduln, bei denen der Skalarbereich ein Körper ist. Definitionen und ein Teil der für die lineare Algebra grundlegenden Eigenschaften erfordern nicht die Einschränkung auf Körper. Dadurch erhalten wir ohne zusätzliche Anstrengung wenigstens anfängliche Ergebnisse, die z.B. auch für räumliche Gitter anwendbar sind. U.a. sind dies die Ergebnisse in 6.18, die Grundlage unseres Dimensionsbegriffes sind. Beispiele dazu gibt es in der Vorlesung.

Darauf aufbauend führt die Möglichkeit der Division mit von 0 verschiedenen Skalaren zu besonders schönen und nützlichen Ergebnissen, die dann allerdings nur noch für Vektorräume gelten. Dies sind insbesondere die Ergebnisse in 6.23 und dann die Verfahren in 6.25 und danach.

Auch für $\mathbb{Z}$-Moduln und damit verwandte Moduln gibt es noch ähnliche weiterführende Ergebnisse. Diese erfordern aber mehr Aufwand und sind nicht mehr Gegenstand dieser Vorlesung. Die allgemeine Modultheorie ist eines von zahlreichen Gebieten der Algebra.

Die wichtigsten der folgenden Resultate werden in der Vorlesung hergeleitet, insbesondere solche, bei denen typische Überlegungen angestellt werden, einige werden im Text hergeleitet. Außerdem gibt es in der Vorlesung weitere Beispiele und Hinweise zur Abgrenzung der unterschiedlichen Begriffe. Einige Eigenschaften können als Übungsaufgaben auftauchen.

6.15 Erste Eigenschaften endlicher linear (un-)abhängiger Familien.

Seien V ein R-Modul, $v_1, \ldots, v_m \in V$, $i_1, \ldots, i_r \in I_m$ paarweise verschieden. Dann gilt

(a) $\left[\ (v_1, \ldots, v_m) \text{ l.u. } \Rightarrow\ (v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}) \text{ l.u. }\right]$
und $\left[\ (v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}) \text{ l.a. } \Rightarrow\ (v_1, \ldots, v_m) \text{ l.a. }\right]$

(b) $\left[\ (v_1, \ldots, v_m) \text{ l.u. } \Rightarrow \forall\, k \in I_m :\ v_k \notin < (v_i)_{i \in I_m \setminus \{k\}} >_R \right]$
und $\left[\ (v_1, \ldots, v_m) \text{ l.a. } \Leftarrow \exists\, k \in I_m :\ v_k \in < (v_i)_{i \in I_m \setminus \{k\}} >_R \right]$

Wenn <u>R ein Körper</u> ist, gelten <u>in (b)</u> auch die Umkehrungen !

6.16 Die zentralen Definitionen für beliebige Familien:
Seien I eine Menge und $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus einem R-Modul V.

(a) Wenn $I = \varnothing$, wenn also $\mathcal{F}$ eine leere Familie ist, dann sei $\mathcal{F}$ linear unabhängig (l.u.).

(b) $\mathcal{F}$ heißt **linear abhängig (l.a.) (über R)**, wenn $\mathcal{F}$ eine endliche linear abhängige Teilfamilie enthält, das heißt, wenn es $r \in \mathbb{N}_+$ und paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_r \in I$ gibt, derart, dass die Familie $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ linear abhängig ist.

(c) $\mathcal{F}$ heißt **linear unabhängig (l.u.) (über R)**, wenn $\mathcal{F}$ nicht linear abhängig ist. Das heißt, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

(d) $\mathcal{F}$ ist ein **Erzeugendensystem von V (als R-Modul)**, wenn $< \mathcal{F} >_R = V$. Besitzt V ein endliches Erzeugendensystem, so heißt V **endlich erzeugt (als R-Modul)**.

(e) $\mathcal{F}$ ist eine **Basis von V (als R-Modul)**, wenn $\mathcal{F}$ ein Erzeugendensystem von V ist und außerdem noch linear unabhängig ist.
Einem 0-Modul wird die leere Menge $\varnothing$ als Basis zugeordnet.

Der Zusatz "als R-Modul" wird in der Regel weggelassen. Er ist allerdings notwendig zur Vermeidung von Missverständnissen in Fällen, wo der Skalarbereich R nicht eindeutig aus dem Kontext hervorgeht, so z.B., wenn $V = \mathbb{C}^n$. Dann könnte ja $R = \mathbb{C}$ aber auch $R = \mathbb{R}$ sein. Ähnlich verhält es sich wenn etwa $V = \mathbb{Q}^n$. Dann könnte $R = \mathbb{Q}$, aber auch $R = \mathbb{Z}$ sein.

6.17 Satz über Basen, unverkürzbare Erzeugendensysteme und unverlängerbare linear unabhängige Familien. Mit den Bezeichnungen aus Definition 6.16 gelten:

(a) Ist $\mathcal{F}$ eine Basis von V, dann ist keine echte Teilfamilie von $\mathcal{F}$ ein Erzeugendensystem von V, m.a.W.: $\mathcal{F}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem. Ist **<u>R ein Körper</u>**, dann ist auch umgekehrt jedes unverkürzbare Erzeugendensystem eine Basis.

(b) Ist $\mathcal{F}$ eine Basis von V, dann ist jede Familie, die alle Vektoren von $\mathcal{F}$ und mindestens einen weiteren enthält, linear abhängig, m.a.W. $\mathcal{F}$ ist eine unverlängerbare linear unabhängige Familie. Ist **<u>R ein Körper</u>**, dann ist auch umgekehrt jede unverlängerbare linear unabhängige Familie eine Basis.

Drei grundlegende Eigenschaften von Erzeugendensystemen und Basen, die über beliebigen kommutativen Ringen gültig sind:

6.18 Satz: Sei V ein R-Modul.

(a) Ist V endlich erzeugt, so enthält jedes Erzeugendensystem ein endliches Erzeugendensystem.

(b) Hat V **eine** endliche Basis, so ist **jede** Basis endlich.

(c) **Eindeutigkeit der Basislänge:** Je zwei endliche Basen haben die gleiche Länge.

Nach diesen Vorbereitungen können wir erklären, was unter Dimension zu verstehen ist.

6.19 Definition Besitzt der R-Modul V eine endliche Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, dann ist

$$\mathsf{dim}_R V := n$$

die **(R-) Dimension von V**.

Nach Satz 6.18(c) ist diese Definition der Dimension sinnvoll.

6.20 Beispiele:

(a) $\mathsf{dim}_R R^{m\times n} = mn$, insbesondere $\mathsf{dim}_R R^{m\times 1} = m$ und $\mathsf{dim}_R R^{1\times n} = n$.
Eine Basis ist $\big(E_{k,l}\big)_{(k,l)\in I_m\times I_n}$. Sie heißt **Standardbasis** oder kanonische Basis. Im Sonderfall $n = 1$ schreiben wir meistens $e^{(k)}$ für $E_{k,1}$.

(b) In $\mathbb{Z}^{1\times 2}$ ist $\big([2,0],[3,0],[0,1]\big)$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem, aber keine Basis. $\big([2,0],[0,1]\big)$ ist eine nicht verlängerbare linear unabhängige Familie aber keine Basis.

Weitere Beispiele folgen später.

Rechnungen und ausführliche Begründungen zum Beispiel 6.20:

(a) Die lineare Unabhängigkeit der Familie $\mathcal{F} = (E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn})$ wurde bereits im Beispiel 6.12(b) nachgewiesen. Bereits in 1.18(a) haben wir gesehen, dass $\mathcal{F}$ auch ein Erzeugendensystem von $R^{m\times n}$ ist. Beides zusammen besagt nach Definition 6.16(e), dass $\mathcal{F}$ eine Basis von $R^{m\times n}$ ist.

(b) Sei zur Abkürzung $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3) = ([2,0],[3,0],[0,1])$ und $\mathcal{G} = (w_1, w_2) = ([2,0],[0,1])$. $\mathcal{F}$ ist nicht l.u., denn $3 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0$. $\mathcal{F}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}^{1\times 2}$, denn für einen Vektor $[a,b] \in \mathbb{Z}^{1\times 2}$ und mit $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = a, \lambda_3 = b$ ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = [a,b]$. $\mathcal{F}$ ist wie behauptet auch unverkürzbar, denn weder (v_1, v_2), noch (v_1, v_3), noch (v_2, v_3) erzeugen $\mathbb{Z}^{1\times 2}$ und umso weniger Teilfamilien davon. Die zweite Familie $\mathcal{G}$ ist jedenfalls l.u. Sei $w_3 = [a,b]$. Mit $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = -2b, \lambda_3 = 2$ gilt dann $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$. Somit ist die Familie (w_1, w_2, w_3) für jeden beliebigen Vektor $w_3 = [a,b]$ linear abhängig. Deswegen kann $\mathcal{G}$ nicht zu einer linear unabhängigen Familie erweitert werden. Eine echte Erweiterung zu einer linear unabhängigen Familie müsste ja mindestens einen weiteren Vektor w_3 zusätzlich enthalten und dann müsste nach 6.15 (a) auch die Teilfamilie (w_1, w_2, w_3) linear unabhängig sein. □

Zusätzliche Ergebnisse und Verfahren über einem Körper.

6.21 Matrizenrang und Dimension:
Sei $A \in K^{m\times n}, A \neq 0$. A werde durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix PA in ZSF umgeformt. $P \in GL(m;K)$ ist das den Umformungen entsprechende Produkt von Elementarmatrizen. Nach Satz 6.10 stimmen dann die Zeilenräume von A und PA überein:

$$\mathrm{ZR}\,(A) = \mathrm{ZR}\,(PA)\ .$$

Nach Beispiel 6.12(c) sind die von 0 verschiedenen Zeilen von PA linear unabhängig. Die Anzahl dieser Zeilen ist nach Definition 4.10 der Rang von A und es gilt insgesamt:

$$\mathsf{dim}_K \mathrm{ZR}\,(A) = \mathsf{Rang}\,A\,.$$

Da nach Satz 3.20 alle Matrizen $P \in GL(m;K)$ Produkte von Elementarmatrizen sind, ist damit auch bereits ein Teil von Satz 4.12 bewiesen: $\mathsf{Rang}\,(PA) = \mathsf{Rang}\,A$. Später werden wir noch herausfinden, dass auch $\mathsf{Rang}\,A = \mathsf{dim}_K SR(A)$ und dass auch der Rest von Satz 4.12 zutrifft.

6.22 Eine praktische Regel: Seien V ein K-Vektorraum, $w \in V$. Sei außerdem $(v_1, \ldots, v_m)$ eine linear unabhängige Familie. Es gilt dann:
$\big[w \notin < v_1, \ldots, v_m >_K \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_m, w)$ l.u. $\big]$ und $\big[w \in < v_1, \ldots, v_m >_K \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_m, w)$ l.a. $\big]$.
Ein Vergleich mit 6.15 lohnt sich.

6.23 Hauptergebnisse für endlich erzeugte Vektorräume:

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum.

(a) Existenz einer Basis. Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine endliche Basis. M.a.W.: Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum besitzt eine endliche Basis und somit auch eine endliche Dimension.

(b) Austauschlemma. Seien $v_1, \ldots, v_r, w \in V$ und $w \neq 0$. Wenn $w \in < v_1, \ldots, v_r >_K$, etwa $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$, dann gibt es $k \in I_r$ derart, dass $\lambda_k \neq 0$ und dann ist $< v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r >_K = < v_1, \ldots, v_r >_K$. Und wenn dabei $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig ist, dann auch die Familie $(v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r)$.

(c) Basisaustauschsatz. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_{\boldsymbol{r}})$ eine Basis von V und $(w_1, \ldots, w_{\boldsymbol{n}})$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann ist zwangsläufig $\boldsymbol{n \leq r}$ und man kann in der Basis $\mathcal{B}$ Vektoren $v_{i_1}, \ldots v_{i_n}$ finden, die durch $w_1, \ldots, w_n$ ersetzt werden können (Austausch), ohne dass die Basiseigenschaft verloren geht.

(d) Monotonie der Dimension. Ist die Familie $(u_1, \ldots, u_m)$ von Vektoren aus V linear unabhängig, so ist $m \leq \mathsf{dim}_K V$.
Jeder Untervektorraum U von V hat eine endliche Basis und es gilt: $\mathsf{dim}_K U \leq \mathsf{dim}_K V$ und wenn $\mathsf{dim}_K U = \mathsf{dim}_K V$, dann ist $U = V$.
Es gibt in V nur endliche l.u.-e Familien.

(e) Basisergänzungssatz. Jede linear unabhängige Familie und jede Basis eines Untervektorraumes U von V kann zu einer Basis von V erweitert werden.

Einen endlich erzeugten K-Vektorraum kann man nun zu recht auch **endlichdimensional** nennen.

Das Austauschlemma, der Basisaustauschsatz und der Basisergänzungssatz sind spezifische Vektorraumeigenschaften, bei denen die Körpereigenschaft ganz wesentlich eingeht.
Demgegenüber können 6.23(a) und (d) auch in allgemeineren Situationen zutreffen. Insbesondere treffen beide Aussagen auch für $\mathbb{Z}$-Untermoduln von $\mathbb{Z}^{n \times 1}$ und damit "verwandte" Moduln zu.

Beweis: (a) Sei $\mathcal{F}$ ein Erzeugendensystem von V. Wegen Satz 6.18 können wir annehmen, dass $\mathcal{F}$ endlich ist. Wenn $\mathcal{F}$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem ist, dann ist nach Satz 6.17(a) bereits $\mathcal{F}$ eine Basis. Wenn nicht dann kann mindestens ein Vektor aus $\mathcal{F}$ weggelassen werden. Unter den endlich vielen Teilfamilien von $\mathcal{F}$ muss es unverkürzbare geben, die V erzeugen. Eine solche ist nach 6.17(a) eine Basis, wenn ein Körper zu Grunde liegt.

(b), (c) und (d): Siehe [F] und Vorlesung.

(e) Sei $\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U. Wenn $\mathcal{G}$ noch keine Basis von V ist, dann muss nach Satz 6.17(b) die Familie $\mathcal{G}$ als l.u.-e Familie verlängerbar sein. Es muss also einen Vektor u_{m+1} geben derart, dass die verlängerte Familie $\mathcal{G}^+ = (u_1, \ldots, u_{m+1})$ immer noch l.u. ist. Wegen Teil (d) ist eine solche Verlängerung nur $\big(\mathsf{dim}_K(V) - m\big)$-mal möglich. Die dann unverlängerbare Familie ist nach 6.17(b) eine Basis von V, da K ein Körper ist. □

6.24 Einfachstes Beispiel eines unendlichdimensionalen Vektorraums.
Sei K ein Körper. In $K^{\mathbb{N}} = \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} : \ a_k \in K\} = \{(a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots) : \ a_k \in K\}$ sei $e^{(n)}$ die Folge mit

$$e_k^{(n)} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ für } k \neq n \\ 1 \text{ für } k = n \end{Bmatrix} .$$

Wie in 6.20(a) erkennt man dass jede endliche Teilfamilie der Familie $\mathcal{F} = \big(e^{(n)}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ linear unabhängig ist über K. Nach Definition 6.16(c) ist die unendliche Familie $\mathcal{F}$ linear unabhängig. Nach Satz 6.23(a) und (d) kann $K^{\mathbb{N}}$ nicht endlich erzeugt sein und keine endliche Basis besitzen. Es ist $\boldsymbol{\mathsf{dim}_K K^{\mathbb{N}} = \infty}$.

Ist $\mathcal{F}$ ein Erzeugendensystem von $K^{\mathbb{N}}$? Das ist nicht der Fall, denn $< \mathcal{F} >_K$ ist ja die Menge der endlichen Linearkombinationen von Folgen aus $\mathcal{F}$. In solchen Linearkombinationen können immer nur endlich viele Einträge von 0 verschieden sein. Es ist demnach

$$< \mathcal{F} >_K = \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \ a_k \neq 0 \text{ nur für endlich viele } k \ \} \neq K^{\mathbb{N}}$$

Da $\mathcal{F}$ linear unabhängig ist, ist $\mathcal{F}$ eine Basis von $< \mathcal{F} >_K$.
Ohne Beweis sei noch erwähnt, dass auch $K^{\mathbb{N}}$ eine Basis besitzt. Ein Nachweis erfordert zusätzliche mengentheoretische Voraussetzungen und es ist schwierig und für uns in dieser Veranstaltung auch nicht so wichtig, eine solche Basis anzugeben. □

6.25 Verfahren zur Entscheidung über lineare Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_m)$, zur Basis- und Dimensionsbestimmung für $< v_1, \ldots, v_m >_K$, zur Basisergänzung und zum Austausch von Basisvektoren über einem Körper.

Die Ergebnisse aus 6.21 zusammen mit Satz 6.10 und 6.13(b) sind Grundlage für Rechenverfahren in Moduln der Form $R^{1\times n}$ oder $R^{n\times 1}$. Wir konzentrieren uns dabei auf Körper. Sei also K ein Körper und $V = K^n$.

Gegeben seien $v_1, \ldots, v_m \in K^n$. Es stellen sich dann folgende Fragen:

(a) Ist die Familie $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig ?

(b) Wie groß ist $\mathsf{dim}_K < v_1, \ldots, v_m >_K$ und wie berechne ich eine Basis von $< v_1, \ldots, v_m >_K$?

(c) Wenn eine Basis $(w_1, \ldots, w_r)$ von $< v_1, \ldots, v_m >_K$ bekannt ist, wie kann diese zu einer Basis von K^n erweitert oder ergänzt werden ?

(d) Seien $v_1, \ldots, v_m$ aus V und linear unabhängig, $U :=< v_1, \ldots, v_m >_K$ und sei $s < m$. Wenn $u_1, \ldots, u_s$ linear unabhängige Vektoren aus U sind, wie lassen sich diese dann zu einer Basis von U ergänzen ?

Die Fragen (a), (b), (c) können sozusagen auf einen Schlag beantwortet werden, im Falle $V = K^{n\times 1}$ durch geeignete elementare Spaltenumformungen an der Matrix $[v_1, \ldots, v_m]$ und im Falle $V = K^{1\times n}$ entsprechend durch geeignete elementare Zeilenumformungen.
Bei (d) sind noch zusätzliche Überlegungen notwendig.

Die Verfahren werden in Spaltenform dargestellt. Wir sagen, eine Matrix $B \neq 0$ hat **Spaltenstufenform (kurz: SSF)**, wenn die Transponierte Matrix ${}^tB$ Zeilenstufenform hat.

Sei $A := [v_1, \ldots, v_m] \neq 0_{n\times m}$.
Durch elementare Spaltenumformungen bzw. durch Multiplikation **von rechts** mit einem Produkt Q von Elementarmatrizen lässt sich A zu einer Matrix $AQ = [w_1, \ldots, w_m]$ in Spaltenstufenform umformen.
Sei r die Anzahl der von 0 verschiedenen Spalten. Außerdem sei für $k \in I_r$ definiert: $j_k := \mathsf{min}\{j \in I_n :$ j-ter Eintrag in $w_k \neq 0\}$. Die kanonischen Basisvektoren in $K^{n\times 1}$ bezeichnen wir mit $e^{(k)}, k \in I_n$.

Wie folgt können jetzt die meisten Ergebnisse direkt aus der Matrix AQ in SSF gewonnen werden:

(a) $(v_1, \ldots, v_m)$ ist genau dann l.u. wenn $r = m$.
Begründung: Wegen 6.13(b) genügt es, die Spalten von AQ zu betrachten. Wenn $r = m$, dann liegt nach Beispiel 6.12(c) (Transposition) lineare Unabhängigkeit vor. Wenn $r < m$ liegt eine Nullspalte vor. Diese ist linear abhängig und nach 6.15(a) ergibt sich die lineare Abhängigkeit der Familie der Spaltenvektoren von AQ.

(b) $\mathsf{dim}_K < v_1, \ldots, v_m >_K = r$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ ist eine Basis $< v_1, \ldots, v_m >_K$. Wenn $r = m$, dann ist auch $(v_1, \ldots, v_m)$ eine (allerdings i.A. komplizierter gebaute) Basis von $< v_1, \ldots, v_m >_K$.
Dies ergibt sich mit Satz 6.10, 6.21 und Beispiel 6.12(c).

(c) Wenn $n - r > 0$ und $I_n \setminus \{j_1, \ldots, j_r\} = \{k_1, \ldots, k_{n-r}\}$, dann ist $(w_1, \ldots, w_r, e^{(k_1)}, \ldots e^{(k_{n-r})})$ eine Basis von $K^{n\times 1}$.
Wenn irgendeine andere Basis von $< v_1, \ldots, v_m >_K$, als die eben berechnete, vorgegeben ist, dann bildet man analog aus den Basisvektoren eine Matrix, berechnet eine SSF und ergänzt wie eben.
Begründung: Sei $C = [w_1, \ldots, w_r, e^{(k_1)}, \ldots e^{(k_{n-r})}]$. Eine Permutation der Spalten von C erzeugt eine Matrix D in Dreiecksform mit lauter von 0 verschiedenen Diagonaleinträgen. Wie in 6.13 (d) sind die Spalten von D bzw. C linear unabhängig. Da $\mathsf{dim}_K K^{1\times n} = n$ nach 6.20(a), liegt wegen Satz 6.23 (nicht verlängerbar) und Satz 6.17(b) eine Basis vor.

(d) Als Untervektorraum von V ist U insbesondere auch ein K- Vektorraum und nach 6.23(c) endlich erzeugt. Alle Ergebnisse von 6.23 treffen auch auf U zu! Trotzdem ist das Vorgehen in (a), (b), (c) nicht ohne weiteres übertragbar, da an einer SSF der Matrix $[u_1, \ldots, u_s]$ zwar nach (c) eine Basisergänzung zu einer Basis für V abgelesen werden kann, aber i.A. nicht für U.

Lösung mit Austauschlemma:

Beginnend mit u_1 ist eine Linearkombination $\lambda_1^{(1)}v_1+\cdots+\lambda_m^{(1)}v_m = u_1$ zu ermitteln. Dazu ist die - wegen der linearen Unabhängigkeit der v_i - eindeutige Lösung des LGS $[v_1,\ldots,v_m]\lambda^{(1)} = u_1$ zu bestimmen. Da $u_1 \neq 0$, ist einer der Skalare, etwa $\lambda_k^{(1)}$, von 0 verschieden. Entsprechend kann nach dem Austauschlemma v_k durch u_1 ersetzt werden, ohne U zu verändern. Das gleiche kann anschließend mit $u_2,\ldots,u_s$ erfolgen. Danach liegt eine Basis $(u_1,\ldots,u_s,v_{i_1},\ldots,v_{i_{m-s}})$ von U vor mit gewissen $i_1,\ldots,i_{m-s} \in I_m$.

I.A. ist dieses Vorgehen aufwendig, da zur Bestimmung der $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\ldots,\lambda^{(s)}$ jeweils ein LGS gelöst werden muss. Weniger aufwendig ist im.A. der folgende Ansatz.

Lösung mit elementaren Umformungen:

Transformiere $[u_1,\ldots,u_s]$ in eine SSF, diese sei $[w_1,\ldots,w_s]$. Seien $j_1,\ldots j_s$ die Zeilennummern der Eckeinträge in der SSF.
Bilde die Matrix $[w_1,\ldots,w_s,v_1,\ldots,v_m]$ und räume beginnend mit mit w_1 und dem Eckeintrag w_{1,j_1} die Einträge in der j_1-ten Zeile aus.
Danach das gleiche mit den weiteren Eckeinträgen w_{2,j_2}, etc. bis hin zu w_{sj_s}. Das Ergebnis sei $[w_1,\ldots,w_s,v_1',\ldots,v_m']$.
Berechne nun eine SSF der Teilmatrix $[v_1',\ldots,v_m']$.
Die von 0 verschiedenen Spalten $v_1'',\ldots,v_{m-s}''$ dieser SSF bilden zusammen mit den u_i (!) die Basis $\big(u_1,\ldots,u_s,v_1'',\ldots,v_{m-s}''\big)$ von U, die die gestellte Aufgabe löst.
Dies liegt i.W. daran, dass ja in den Zeilen $j_1,\ldots,j_s$ jeweils 0 als Eintrag in den Vektoren $v_1',\ldots,v_m'$ steht und sich dies durch weitere Spaltenumformungen unter den v_i' nicht mehr ändert.
Eine geeignete Permutation der Spalten bringt die Matrix $[u_1,\ldots,u_s,v_1'',\ldots,v_{m-s}'']$ in eine ZSF ohne 0-Spalten.

6.26 Beispiel: Sei $A := [v_1,\ldots,v_5] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ und $\mathcal{G} = (v_1,\ldots,v_5)$ die Familie der Spalten von A. Durch wenige elementare Spaltenumformungen erhält man z.B. folgende SSF:

$$AP_1^2S_1(-1)Q_1^3(2)Q_1^4(3)Q_1^5(4)Q_2^3(1)Q_2^4(2)Q_2^5(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: [w_1,w_2,0,0,0].$$

Folgende Antworten auf die Fragen (a),(b),(c) lassen sich jetzt unmittelbar ablesen:
(a) $\mathcal{G}$ ist l.a.
(b) $\mathsf{dim}_K < \mathcal{G} >_K = 2$ und $\mathcal{B} := (w_1,w_2)$ ist eine Basis von $< \mathcal{G} >_K$.
(c) Hier ist $j_1 = 1, j_2 = 2$ und $I_3 \setminus \{j_1,j_2\} = \{3\}$.
$(w_1,w_2,e^{(3)})$ ist eine Erweiterung von $\mathcal{B}$ und Basis von V.
Ein Beispiel zu 6.25(d) gibt es in der Vorlesung oder über die Internetseite der Vorlesung. □

Weitere Grundaufgaben der linearen Algebra

Bevor wir zu den Aufgaben kommen noch ein paar Sprechweisen und Definitionen (z.T. Wiederholung).

6.27 Definition
Seien U und W Untermoduln des R-Moduls V:

$$\boldsymbol{U+W := \big\{u+w:\ u\in U} \text{ und } w\in W\big\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{U\cap W := \big\{v\in V:\ v\in U \text{ und } v\in W\big\}}$$

Man rechnet nach, dass $U+W$ und $U\cap W$ Untermoduln von V sind.

Auch für die folgenden Aufgaben können wir Lösungen angeben, die über einem Körper mit elementaren Umformungen berechnet werden können.
Seien $v \in R^{n\times 1}$ und $\mathcal{F} = (u_1,\ldots,u_r)$, $\mathcal{G} = (w_1,\ldots,w_s)$ zwei Familien in $\in R^{n\times 1}$.

(A) Entscheide ob v im Aufspann von $\mathcal{F}$ liegt !
Lösung: Bilde die Matrix A aus den Spaltenvektoren der Familie $\mathcal{F}$ und entscheide (wenn R ein Körper ist z.B. z.B. mit dem Verfahren aus §4), ob $\mathsf{Lös}\,(A,v) \neq \varnothing$.

(B) Bestimme eine Basis von $<\mathcal{F}>_R + <\mathcal{G}>_R$!

Lösung: Sei $\mathcal{H} = (u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s)$. Allgemein gilt: $<\mathcal{F}>_R + <\mathcal{G}>_R = <\mathcal{H}>_R$. Wenn R ein Körper ist, wissen wir, dass eine Basis existiert und es genügt, mit $\mathcal{H}$ nach 6.25 zu verfahren.

(C) Bestimme eine Basis von $<\mathcal{F}>_R \cap <\mathcal{G}>_R$!

Die Lösung für Aufgabe **(C)** ergibt sich aus folgendem Satz

6.28 Zur Berechnung des Durchschnitts von Untervektorräumen:

Mit den vorangehenden Bezeichnungen und mit $M = [u_1, \ldots, u_r], N = [w_1, \ldots, w_s]$ gilt:

$$\begin{aligned} &<\mathcal{F}>_R \cap <\mathcal{G}>_R = \\ &= M \cdot \begin{bmatrix} E_r & | & 0_{r\times s} \end{bmatrix} \cdot \mathsf{Lös}\Big(\begin{bmatrix} M, -N \end{bmatrix}, 0 \Big) \\ &= N \cdot \begin{bmatrix} 0_{s\times r} & | & E_s \end{bmatrix} \cdot \mathsf{Lös}\Big(\begin{bmatrix} M, -N \end{bmatrix}, 0 \Big) \end{aligned}$$

Wenn R ein Körper ist, dann kann eine Basis des Durchschnitts mit Hilfe von elementaren Umformungen berechnet werden.

Zum Abschluss dieses § noch eine nützliche Dimensionsformel.

6.29 Dimensionssatz für Untervektorräume:

Seien U und W Untervektorräume eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gilt

$$\mathsf{dim}_K U + \mathsf{dim}_K W = \mathsf{dim}_K(U + W) + \mathsf{dim}_K(U \cap W)$$

6.30 Definition Seien U und W Untervektorräume des endlichdimensionalen K-Vektorraums V.

U heißt **Grade (durch den Nullpunkt), Ebene (durch den Nullpunkt), bzw. Hyperebene (durch den Nullpunkt)**, wenn $\mathsf{dim}_K U = 1,\ = 2$, bzw. $= (\mathsf{dim}_K V) - 1$.

6.31 Als **Beispiel für die Anwendung der Dimensionsformel** berechnen wir die Dimension des Durchschnitts zweier verschiedener Hyperebenen H_1, H_2 (durch den Nullpunkt) in einem n-dimensionalen K-Vektorraum V. Es ist dann $H_1 + H_2 = V$ und die Formel besagt: $\mathsf{dim}_K\big(H_1 \cap H_2\big) = n - 2$. Wenn V eine Ebene ist, besagt dies einfach, dass sich zwei verschiedene Graden durch den Nullpunkt in diesem schneiden und wenn V dreidimensional ist, dass sich zwei verschiedene Ebenen in einer Graden schneiden.

6.32 Abschließende Bemerkungen zum Dimensionsbegriff:

Der mathematische Dimensionsbegriff ist eine weitere wichtige Errungenschaft, die wir uns im Laufe dieser Vorlesung erschlossen haben. Er stammt noch aus dem 19. Jahrhundert und wird in seinen Grundlagen Hermann Graßmann (1809-1877) zugeschrieben[1]. Erst ein axiomatisch definierter Dimensionsbegriff ermöglicht seit Beginn des 20. Jahrhunderts das Vordringen in Räume, die unserer Anschauung nicht mehr zugänglich sind. Ein populäres Beispiel ist die vierdimensionale Welt der Relativitätstheorie. In der Atomphysik ist es heute selbstverständlich geworden mit unendlichdimensionalen Räumen zu arbeiten darunter die sog. Hilberträume. In der Approximationstheorie werden u.A. Objekte aus unendlichdimensionalen Räumen durch solche aus einem endlichdimensionalen approximiert und dadurch der praktischen Verwendung zugänglich gemacht. Schon für die Berechnung von Steuerungen für einfache technische Regelsysteme sind häufig Zustandsräume notwendig, deren Dimension die uns vertraute Dimension 3 weit übersteigt. Ihr CD-Player benutzt einen Fehlerkorrigierender Code beim Lesen Ihrer CD-s[2], der ein Untervektorraum ist eines 255-dimensionalen Vektorraumes über einem Körper mit 256 Elementen. In der Finanzmathematik sind Integralberechnungen in 360-dimensionalen Räumen nichts ungewöhnliches mehr[3].

In dem Artikel[4] steht im Abschnitt 4 auf Seite 526: As the powers of computers approach their theoretical limits and as we turn to more realistic (and thus more complicated) problems, we face 'the curse of dimension', which stands in the way ..... Ich hoffe, Sie verfluchen nicht die ausführliche Behandlung des Dimensionsbegriffes in dieser Vorlesung.

[1] Ein spannender Text zur Geschichte einiger Begriffe der linearen Algebra ist über die Internetseite der Vorlesung erreichbar.

[2] Betten e.a., *Codierungstheorie, Konstruktion und Anwendung linearer Codes*, Springer 1998, S.112.

[3] Frances Y. Kuo and Ian H. Sloan: Lifting the Curse of Dimensionality, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 52, December 2005, Number 11.

[4] Seiten 525-527 des Sammelbandes *Mathematics unlimited - 2001 and beyond*, 'possible trends in mathematics in the coming decades', Hrsg. Björn Engquist und Wilfried Schmidt, Springer, 2001.