**7.19 weitere Beispiele**

**(a) Bestimmung des Koordinatenvektors bezüglich einer gegebenen Basis:**

Seien $W = \mathbb{Q}^{2\times 1}, w_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \mathfrak{B} = (w_1, w_2)$ und $w = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Sei weiter $P_{\mathfrak{B}} = [w_1, w_2] = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, dann ist $\lambda_{\mathfrak{B}} = L_B$ und der Koordinatenvektor von $w$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ ist

$$\kappa_{\mathfrak{B}}(w) = B^{-1}w = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\3/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}.$$

Zur Probe kann man berechnen: $(-3)w_1 + 2w_2 = \begin{bmatrix}-3+4\\-9+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = w$.

Bei diesem und auch bei allen anderen Beispielen, wo in $K^{n\times 1}$ neue Kordinaten eingeführt werden, sind auch die Koordinatenabbildungen selbst durch Matrizen darstellbar, was leicht Verwirrung stiftet. Im vorliegenden Fall ist $\lambda_{\mathfrak{B}} = L_{P_{\mathfrak{B}}}$ und $P_{\mathfrak{B}} = M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{K}}(\lambda_{\mathfrak{B}})$. Dabei ist $\mathfrak{K}$ die kanonische Basis. Derartiges ist im folgenden Beispiel nicht mehr möglich.

**(b) ... das gleiche in einem ungewohnteren Kontext:**

Seien $W = \mathbb{Q}^{2\times 2}, w_1 = E_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, \mathfrak{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ und $w = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$. Wir bestimmen den Koordinatenvektor von $w$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$.

Gesucht ist also $x = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$ mit $\lambda_{\mathfrak{B}}(x) = x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 + x_4w_4 = w$, bzw. mit

$$\begin{bmatrix}x_1 + x_2 & x_3 + x_4\\x_3 - x_4 & x_1 - x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

bzw. mit

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

bzw. mit $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$. Es folgt $x = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}5/2 & -3/2 & 5/2 & -1/2\end{bmatrix}$.

Tatsächlich ist $\frac{5}{2}w_1 - \frac{3}{2}w_2 + \frac{5}{2}w_3 - \frac{1}{2}w_4 = w$.

Die kanonische Basis zeilenweise angeordnet ist hier $\mathfrak{K} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Damit erhält man

$$\big[\kappa_{\mathfrak{K}}(w_1), \kappa_{\mathfrak{K}}(w_2), \kappa_{\mathfrak{K}}(w_3), \kappa_{\mathfrak{K}}(w_4)\big] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix} := S$$

und damit wiederum

$$x = S^{-1}\,\kappa_{\mathfrak{K}}(w) = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\1/2 & 0 & 0 & -1/2\\0 & 1/2 & 1/2 & 0\\0 & 1/2 & -1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

Dabei ist übrigens $S = T^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{K}}$ und $S^{-1} = T^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{B}}$.

**(c) Die Matrix einer linearen Abbildung, die schon durch eine Matrix gegeben ist, bezüglich einer neuen Basis:**

Sei $L : \mathbb{Q}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 1}$ die durch $B = \begin{bmatrix}-5 & -8 & 5\\2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ gegebene lineare Abbildung und sei mit $\mathfrak{K}$ die kanonische Basis sowohl in $\mathbb{Q}^{2\times 1}$, als auch in $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ bezeichnet. Außerdem seien die Basen $\mathfrak{A} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, v_2 = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\end{bmatrix}, v_3 = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$) und $\mathfrak{B} = (w_1, w_2)$ mit $w_1 = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}-5 & 2\end{bmatrix}, w_2 = {}^{\mathsf{t}}\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}$) gegeben. Zunächst ist ja $M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{K}}(L) = B$. Aber wie sieht die Matrix $M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(L)$ aus ? Wir berechnen

$$\begin{aligned}M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(L) &= \big[\,\kappa_{\mathfrak{B}}\big(L(v_1)\big), \kappa_{\mathfrak{B}}\big(L(v_2)\big), \kappa_{\mathfrak{B}}\big(L(v_3)\big)\,\big]\\ &= \Big[\,L^{-1}_{P_{\mathfrak{B}}}\Big(L_B\big(L_{P_{\mathfrak{A}}}(e_1)\big)\Big), L^{-1}_{P_{\mathfrak{B}}}\Big(L_B\big(L_{P_{\mathfrak{A}}}(e_2)\big)\Big), L^{-1}_{P_{\mathfrak{B}}}\Big(L_B\big(L_{P_{\mathfrak{A}}}(e_3)\big)\Big)\Big] \quad = P^{-1}_{\mathfrak{B}}BP_{\mathfrak{A}}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dabei ist $P_{\mathfrak{B}} = [w_1, w_2] = \begin{bmatrix}-5 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}$ und $P_{\mathfrak{A}} = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}$. Die mittleren Gleichungen wurden lediglich als Hintergrundinformation nochmals aufgeführt.