Verbindungsraum zweier affiner Unteräume

9.9 Definition: Seien $\Gamma = v + U, \Gamma' = v' + U'$ affine Unteräume (aUR-e) des K-Vektorraums V.

$$\Gamma \vee \Gamma' := \bigcap_{\substack{\Delta \text{ aUR} \\ \Gamma \cup \Gamma' \subseteq \Delta}} \Delta$$

Nach 9.2 (c) ist $\Gamma \vee \Gamma'$ ein aUR und per Konstruktion ist $\Gamma \vee \Gamma'$ automatisch <u>der</u> kleinste aUR von V bezüglich $\subseteq$, der Γ und Γ' enthält.

9.10 Satz. Zur Beschreibung und Berechnung von $\Gamma \cap \Gamma'$ und $\Gamma \vee \Gamma'$.

(a) (i) Falls $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$ und $v^* \in \Gamma \cap \Gamma'$, dann ist

$$\Gamma \cap \Gamma' = v^* + U \cap U'$$

(ii) Falls $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$, dann ist

$$\Gamma \vee \Gamma' = v + (U + U')$$

(iii) Stets ist

$$\Gamma \vee \Gamma' = v + \big(U + U' + \langle v - v' \rangle_K\big)$$

Dabei ist $\Gamma \cap \Gamma' \neq \varnothing$ genau dann, wenn $v - v' \in U + U'$.

(b) Seien $V = K^{n \times 1},\ U = \langle x^{(1)}, \ldots, x^{(r)} \rangle_K,\ U' = \langle y^{(1)}, \ldots, y^{(s)} \rangle_K$ und

$$M = \big[x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}\big],\ N = \big[y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}\big]\ .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma \cap \Gamma' &= v + M \cdot \big[E_r |\ 0\ \big] \cdot \ \mathsf{Lös}\,(\big[M, -N\big], v' - v) \\ &= v' + N \cdot \big[\ 0\ | E_s\big] \cdot \ \mathsf{Lös}\,(\big[M, -N\big], v' - v) \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\mathsf{Lös}\,(\big[M, -N\big], v' - v)$ i.A. selbst ein aUR ist, der dann nochmal verschoben wird, falls v oder v' nicht 0 sind.

(c) Seien $A \in K^{k \times n},\ A' \in K^{l \times n},\ \Gamma = \ \mathsf{Lös}\,(A, Av),\ \Gamma' = \ \mathsf{Lös}\,(A', A'v')$, dann ist

$$\Gamma \cap \Gamma' = \ \mathsf{Lös}\,(\begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Av \\ A'v' \end{bmatrix})$$