Definition 1: Abbildungen

(a) Seien M, N nichtleere Mengen.

Eine <u>Abbildung</u> f von M nach N (kurz: $f: \ M \to N$) ist gegeben durch eine Abbildungsvorschrift, die jedem $x \in M$ <u>ein</u> Element $f(x) \in N$ zuweist.

Zwei Abbildungen $f, g: \ M \to N$ sind genau dann gleich (kurz: $f = g$),
wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$.

Sei im Folgenden $f: \ M \to N$ eine Abbildung.

(b) f heißt <u>injektiv</u>, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:
wenn $f(x_1) = f(x_2)$, dann $x_1 = x_2$.

(formal: $\forall x_1, x_2 \in M: \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

f heißt <u>surjektiv</u>, wenn es für alle $y \in N$ ein $x \in M$ gibt, derart dass $f(x) = y$.
(formal: $\forall y \in N \ \exists x \in M: \ f(x) = y$)

f heißt <u>bijektiv</u>, wenn f zugleich injektiv und surjektiv ist.

(c) Zu $x \in M$ heißt $f(x)$ <u>Bild von x</u> (unter f). Zu einer Teilmenge $U \subseteq M$ heißt

$$f(U) = \{f(x): \ x \in U\}$$

<u>Bild(-menge)</u> von U (unter f).

Ein Element $x \in M$ heißt <u>Urbild</u> von $y \in N$ (unter f), wenn $f(x) = y$. Zu einer Teilmenge $V \subseteq N$ heißt

$$f^{-1}(V) = \{x \in M: \ f(x) \in V\}$$

<u>Urbild(-menge)</u> von V (unter f). Die Menge der Urbilder von $y \in N$ unter f ist

$$f^{-1}(\{y\}).$$

(d) Ist U eine nichtleere Teilmenge von M, dann ist $f_{|U}$ die Abbildung mit der Abbildungsvorschrift

$$f_{|U}(x) = f(x) \quad \text{für } x \in U.$$

Bemerkungen:

Stets ist $f^{-1}(N) = M$ und für $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ ist stets

$$f^{-1}(\{x_1\}) \cap f^{-1}(\{x_2\}) = \varnothing \ .$$

Statt 'Abbildung' wird vor allem im Bereich der Analysis und in Anwendungen oft der Name 'Funktion' benutzt.