Aufgabe 11 Sei M die Menge aller rellen 4×4-Matrizen $A = (a_{ij})$, die den folgenden Bedingungen genügen: $a_{1j} = a_{i1} = a_{4j} = a_{i4} = 0$ für $1 \leq i, j \leq 4$. Machen Sie sich zunächst klar, wie diese Matrizen aussehen, und geben sie ein typisches Beispiel an. Zeigen Sie dann:

(a) Mit $A, B \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch $A + B, A \cdot B$ und λA wieder aus M.

(b) M ist ein Ring bezüglich $+, \cdot$.

Lösung: Eine Matrix $A \in M$ hat allgemein folgende Form:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Konkrete Beispiele sind

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ oder } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teil (a): Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M \text{ und } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M.$$

Zunächst betrachten wir die Summe $A + B$. Definiere

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+\alpha & b+\beta & 0 \\ 0 & c+\gamma & d+\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: C = (c_{ij}).$$

Es ist $C \in M$, da $c_{1j} = c_{i1} = c_{4j} = c_{i4} = 0$ und $a + \alpha, b + \beta, c + \gamma, d + \delta \in \mathbb{R}$. Ebenso sieht man, dass sowohl

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a & \lambda b & 0 \\ 0 & \lambda c & \lambda d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$$

gilt, als auch

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta & 0 \\ 0 & c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M.$$

Teil (b): Zu zeigen ist laut Definition 11:

(1) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe, dh.

- M ist abgeschlossen bezüglich der Addition.
- Die Addition ist assoziativ.
- Die Addition ist kommutativ.
- Es existiert ein neutrales Element $0_M \in M$, so dass für alle $A \in M$ gilt: $A + 0_M = 0_M + A = A$.
- Für alle $A \in M$ existiert ein inverses Element $A' \in M$ so daß $A + A' = A' + A = 0_M$.

(2) $(M, \cdot)$ ist ein Monoid, d.h.

- M ist abgeschlossen bezüglich der Multiplikation.
- Die Multiplikation ist assoziativ.
- Es existiert ein bezüglich der Multiplikation neutrales Element $1_M \in M$, so dass für alle $A \in M$ gilt: $A \cdot 1_M = 1_M \cdot A = A$.

(3) Es gelten die Distributivgesetze für alle $A, B, C \in M : A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Die Definition wird nun in dieser Reihenfolge nachgerechnet.

(1) Die Abgeschlossenheit von M bezüglich der Addition wurde in (a) gezeigt. Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gelten laut Satz 1.12 für alle 4×4-Matrizen, also auch für alle Matrizen aus M. Die Nullmatrix $0_{4\times 4}$ ist offensichtlich in M und nach Satz 1.12 gilt $0_{4\times 4} + A = A$. (Daraus folgt $A + 0_{4\times 4} = A$ wegen der Kommutativität der Addition.) Für alle $A \in M$ ist nach Teil (a) auch $-A = (-1)A \in M$ und wiederum nach Satz 1.12 ist $-A$ inverses Element bezüglich der Addition.

(2) Die Abgeschlossenheit von M bezüglich der Multiplikation wurde in Teil (a) gezeigt. Das Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation gilt nach Satz 1.13 für alle 4×4-Matrizen. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist

$$1_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M,$$

denn es gilt für $A \in M$:

$$A \cdot 1_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$1_M \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Die Distributivgesetze gelten laut Satz 1.13 für alle 4×4-Matrizen.