**Aufgabe 17.** *Fortsetzung der Aufgabe (14). Bearbeiten Sie die von Ihnen gewählten Aufgabenteile wie folgt weiter:*

*Bei (a)* *(i) Bestimmen Sie* $L_1 := \{b \in \mathbb{Q}^{3\times 1} : \mathsf{Lös}(A,b) \neq \varnothing\}$.

*(ii) Bestimmen Sie die Menge* $\mathsf{Lös}(A,b)$ *für* $b \in L_1$.

*Bei (b) Geben Sie ein* $b \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$ *an, derart dass* $\mathsf{Lös}(A,b) \cap \mathbb{Z}^{4\times 1} \neq \varnothing$ *ist, und ein* $b' \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$ *an, derart dass* $\mathsf{Lös}(A,b') \cap \mathbb{Z}^{4\times 1} = \varnothing$.

*Bei (c) Bestimmen Sie die Menge* $\mathsf{Lös}(A,b)$ *mit* $b := \left[\begin{smallmatrix} 10+10i \\ 10-10i \end{smallmatrix}\right]$.

**Lösung.** Zu (a) (i). Wir betrachten irgendein $b = {}^t[b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$. Nach Aufgabe (14) wissen wir, dass für

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Matrix

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in reduzierter Zeilenstufenform ist. Wir wissen weiterhin nach Satz 4.3 (a), dass genau dann $\mathsf{Lös}(A,b) = \varnothing$ ist, wenn $\mathsf{Lös}(PA,Pb) = \varnothing$ gilt. Das ist äquivalent zur Aussage, dass genau dann $\mathsf{Lös}(A,b) \neq \varnothing$ ist, wenn $\mathsf{Lös}(PA,Pb) \neq \varnothing$ gilt. Nach Satz 4.6 ist $\mathsf{Lös}(PA,Pb) \neq \varnothing$, wenn $(Pb)_3 = 0$ gilt. Wir rechnen nun aus

$$(Pb)_3 = b_3 - b_2 - b_1.$$

Damit ist insgesamt $\mathsf{Lös}(A,b) \neq \varnothing$ für

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } b_1 \text{ und } b_2 \in \mathbb{Q},$$

und die Menge $L_1$ lässt sich angeben als

$$L_1 = \{\alpha \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + \beta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \mid \alpha \text{ und } \beta \in Q\}.$$

*Alternative Lösung:* Für jedes $x \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$ und $b := Ax$ ist $x \in \mathsf{Lös}(A,b)$ also $\mathsf{Lös}(A,b) \neq \varnothing$. Umgekehrt bedeutet $b \in L_1$, dass ein $x \in \mathsf{Lös}(A,b)$ existiert mit $Ax = b$. Das heißt aber nun, dass die Menge $L_1 = \{Ax : x \in \mathbb{Q}^{4\times 1}\}$ ist. Da wir jedes $x \in Q^{4\times 1}$ als $x = {}^t[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ schreiben können mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta \in \mathbb{Q}$, finden wir die schönere Darstellung

$$L_1 = \{\alpha \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{smallmatrix}\right] + \beta \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] + \gamma \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + \delta \left[\begin{smallmatrix} 7 \\ 5 \\ 15 \end{smallmatrix}\right] : \alpha, \beta, \gamma \text{ und } \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

Zu (a) (ii). Wir wissen nach (i) , dass $b$ die Gestalt ${}^t[\alpha, \beta, \alpha+\beta]$ mit $\alpha$ und $\beta \in \mathbb{Q}$ hat. Nach Satz 4.3 (b) ist $\mathsf{Lös}(A, b) = \mathsf{Lös}(PA, Pb)$. Wir rechnen aus

$$Pb = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{12} \\ \frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Satz 4.6 kann man – da $PA$ in reduzierter Zeilenstufenform ist – die Lösungsmenge ablesen:

$$\mathsf{Lös}(A, b) = \mathsf{Lös}(PA, Pb) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\beta}{6}+\frac{\alpha}{12}-\frac{1}{3}v_2-\frac{17}{12}v_4 \\ v_2 \\ \frac{\alpha}{8}-\frac{\beta}{4}+\frac{3}{8}v_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; v_2 \text{ und } v_4 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

*Alternative Lösung:* Sei nun $b$ aus $L_1$. Mit der alternativen Lösung zu (i) wissen wir, dass $b$ sich schreiben lässt als

$$b = \alpha \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta \in \mathbb{Q}$. Es gilt also $A^t[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = b$. Nach Satz 4.3 (c) gilt nun

$$\mathsf{Lös}(A, b) = {}^t[\alpha, \beta, \gamma, \delta] + \mathsf{Lös}(A, 0).$$

Die Menge $\mathsf{Lös}(A, 0)$ können wir wegen Satz 4.3 (b) mit Satz 4.6 und der Zeilenstufenform von $A$ aus Aufgabe (14) bestimmen. Diese ist oben in Teil (i) bereits aufgeführt. Mit dem Satz liest man nun direkt ab:

$$\mathsf{Lös}(A, 0) = \mathsf{Lös}(PA, 0) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}v_2-\frac{17}{12}v_4 \\ v_2 \\ \frac{3}{8}v_4 \\ v_4 \end{bmatrix} : v_2 \text{ und } v_4 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Zu (b): Wir betrachten zunächst $b := 0_{3\times 1} \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$. Offensichtlich haben wir $0_{3\times 1} = A\, 0_{4\times 1}$. Also ist wegen $0_{4\times 1} \in \mathbb{Z}^{4\times 1}$ die Menge $\mathsf{Lös}(A, b) \cap \mathbb{Z}^{4\times 1} \neq \varnothing$.

Wir bestimmen nun einen Vektor $b' \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$, für den $\mathsf{Lös}(A, b) \cap \mathbb{Z}^{4\times 1} = \varnothing$ gilt. Nach Satz 4.3 (b) gilt für $P \in GL(3, \mathbb{Q})$

$$\mathsf{Lös}(A, b) = \mathsf{Lös}(PA, Pb).$$

In Aufgabe (14) (a) wurden Elementarmatrizen berechnet, deren Produkt

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

von links an $A$ multiplizert die Matrix

$$P\,A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in Zeilenstufenform ergibt. Außerdem ist $P$ als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar. Wir wählen nun

$$b' := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt $\mathsf{Lös}(PA, b') = \varnothing$, denn es kann nur dann eine Lösung geben, wenn $b'_3 = 0$ ist. Nach dem oben zitiertem Satz 4.3 gilt also $\mathsf{Lös}(A, P^{-1}b') = \varnothing$. Da $Pb' = b'$ gilt, ist $b' = P^{-1}Pb' = P^{-1}b'$. Es folgt $\mathsf{Lös}(A, b') = \varnothing = \mathsf{Lös}(A, b') \cap \mathbb{Z}^{4\times 1}$. Wegen $b' \in \mathbb{Z}^{3\times 1}$ ist damit die Aufgabe gelöst.

*Alternative Lösung:* Wir bringen die Matrix $PA$ von oben auf reduzierte Zeilenstufenform, indem wir analog zu Beispiel 4.5 Spaltenumformungen benutzen.[1] Dazu definieren wir

$$Q = P_2^1\, Q_1^2(-3)\, Q_1^3(2)\, Q_1^4(-5)\, Q_4^3(3)\, P_3^2\, S_2(-1)\, Q_2^4(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & -3 & 34 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -8 \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{Z}).$$

Und rechnen nach

$$(PA)\, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Satz 4.3 (a) ist genau dann $\mathsf{Lös}(A, b) = \varnothing$, wenn $\mathsf{Lös}(PAQ, Pb) = \varnothing$ gilt. Jetzt können wir Satz 4.6 benutzen – $PAQ$ ist ja in reduzierter Zeilenstufenform – und sehen, dass für $b'$ wie oben $\mathsf{Lös}(PAQ, Pb') = \varnothing$ gilt. Natürlich ist auch hier wieder $P^{-1}b' = b'$ und damit $\mathsf{Lös}(A, b') = \varnothing$.

Zu (c): Von der Bearbeitung der Aufgabe 14 wissen wir, dass die Zeilenstufenform von $A$ gleich

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

ist. Außerdem haben wir dort als Produkt der Elementarmatrizen

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}(3+i) & \frac{1}{10}(2-i) \\ \frac{1}{10}(1-3i) & \frac{1}{10}(4+3i) \end{bmatrix}$$

erhalten. Wir müssen nach Satz 4.3 (b) nun also $\mathsf{Lös}(E_2, Pb)$ bestimmen. Dafür rechnen wir $Pb$ aus:

$$P\,b = \begin{bmatrix} \frac{10}{10}(3+i)(1+i) + \frac{10}{10}(2-i)(1-i) \\ \frac{10}{10}(1-3i)(1+i) + \frac{10}{10}(4+3)(1-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ 11-3i \end{bmatrix} =: b'.$$

Da $E_2$ eine Einheitsmatrix ist, ist $E_2\, x = b'$ für alle $x \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ äquivalent zu $x = b'$. Also ist $\mathsf{Lös}(E_2, b')$ einfach $\{b'\}$.

[1] Achtung! Bei ganzzahligen Matrizen kann man nicht immer eine reduzierte Zeilenstufenform erreichen.