Aufgabe 2. *Seien* $M = \mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$, $f \in \mathsf{Abb}(M, M)$ *und gelte für* $x \in M$*:*

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

(a) *Zeigen Sie:* f *ist injektiv, aber nicht surjektiv.*

(b) *Zeigen Sie durch vollständige Induktion:*

$$f^{\textcircled{n}}(x) = \frac{x}{nx+1}$$

für alle $n \geq 1$ *und alle* $x \in M$*.*

Bemerkung: *Ein ganz anderes Ergebnis erhält man mit dem Funktionsausdruck* $\frac{x+1}{x}$*. Es treten dann die sogenannten* Fibonacci-Zahlen *auf.*

Lösung. Zu (a). Seien x und $y \in M$. Um zu zeigen, dass f injektiv ist, müssen wir zeigen, dass aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$. Sei also $f(x) = f(y)$ angenommen. Wir setzen für f den Funktionsausdruck ein und erhalten mit der Annahme

$$\frac{x}{x+1} = f(x) = f(y) = \frac{y}{y+1}.$$

Indem wir die Gleichung mit $(x+1) \cdot (y+1)$ multiplizieren und kürzen folgt daraus

$$x(y+1) = y(x+1),$$

was nach dem Distributivgesetz das selbe ist wie

$$xy + x = xy + y.$$

Nun können wir auf beiden Seiten xy abziehen und bekommen

$$x = y,$$

was zu zeigen war. Also ist f injektiv.

Um zu beweisen, dass f nicht surjektiv ist, müssen wir ein $y \in M$ finden, für das kein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$. Wir setzen $y = 1 \in M$ und behaupten, dass $f(x) = 1$ für kein $x \in M$ erfüllbar ist. Dies wird durch Widerspruch bewiesen. Angenommen, es gälte $f(x) = 1$ für ein $x \in M$. Dann wäre also nach Definition von f

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = 1.$$

Durch Multplikation mit $x + 1$ folgt daraus

$$x = x + 1.$$

Wenn wir nun x subtrahieren, erhalten wir $0 = 1$, was falsch ist. Also haben wir einen Widerspruch hergeleitet und unsere Annahme, dass es ein $x \in M$ mit

$f(x) = 1$ gäbe, muss somit falsch sein. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass f nicht surjektiv ist.

Zu (b). Wir beweisen die Aussage mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Induktionsanfang. Sei $n = 1$. Nach der Definition des „$\textcircled{n}$“ in Paragraph 0 Beispiel 3(b) (wird benutzt bei der ersten Gleichung) und von f (zweite Gleichung) gilt für alle $x \in M$

$$f^{\textcircled{1}}(x) = f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x}{1 \cdot x + 1}.$$

Damit ist die Behauptung für $n = 1$ wahr.
Induktionsschritt.

Annahme: Es gelte $f^{\textcircled{n}}(x) = \frac{x}{nx+1}$ für ein $n \geq 1$ und alle $x \in M$.

Wir müssen nun zeigen, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt, dass also die Gleichung

$$f^{\boxed{n+1}}(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

für alle $x \in M$ stimmt. (Dieser Teilschritt wird oft auch als *Induktionsschluss*, *Induktionsschritt* oder *Schluss von n auf $n + 1$* bezeichnet.)

Wir wissen nach der Definition von „$\boxed{n+1}$“ (und der von f), dass für alle $x \in M$ gilt

$$f^{\boxed{n+1}}(x) = f^{\textcircled{n}}(f(x)) = f^{\textcircled{n}}(\tfrac{x}{x+1}).$$

Auf den letzten Ausdruck können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten

$$f^{\textcircled{n}}(\tfrac{x}{x+1}) = \frac{\frac{x}{x+1}}{n\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{nx}{x+1} + 1}.$$

Nun wird der letzte Ausdruck elementar umgeformt:

$$\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{nx}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{nx+x+1}{x+1}} = \frac{x}{nx + x + 1} = \frac{x}{(n+1)x + 1}.$$

Damit haben wir insesamt gezeigt

$$f^{\boxed{n+1}}(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1},$$

was behauptet war. $\square$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion trifft die Behauptung also für alle $n \geq 1$ und alle $x \in M$ zu.