Musterlösung zu Aufgabe 21

(a)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei A_n eine reelle $n \times n$-Matrix mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} a_{ij} = 0 & \text{für} & |i-j| \geq 2 \\ a_{ii} = \alpha_i & \text{für} & 1 \leq i \leq n \\ a_{i,i+1} = \beta_i,\ a_{i+1,i} = \gamma_{i+1} & \text{für} & 1 \leq i \leq n-1 \end{array}$$

Zeige: $\det A_1 = \alpha_1$ und $\det A_2 = \alpha_1\alpha_2 - \gamma_2\beta_1$

Lösung:

Für $n = 1$ ist $A_1 = [a_{11}] = [\alpha_1] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und damit $\det A_1 = a_{11} = \alpha_1$ gemäß der Leibniz-Formel für $n = 1$.

Für $n = 2$ ist $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Nach der Leibniz-Formel für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \det A_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\gamma_2 \end{aligned}$$

Zeige: $\det A_n = \alpha_n \det A_{n-1} - \gamma_n\beta_{n-1} \det A_{n-2}$ für $n \geq 3$.

Lösung:

Ich zeige die Behauptung mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, indem ich zunächst nach der n-ten Spalte entwickle:

$$\begin{aligned} \det A_n &= \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_3 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & 0 & \gamma_n & \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n-1+n}\beta_{n-1} \det \left[\begin{array}{c|c} A_{n-2} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{n-2} \end{matrix} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & \gamma_n \end{array}\right] + (-1)^{n+n}\alpha_n \det A_{n-1} \qquad (*) \end{aligned}$$

Entwickle ich nun die Matrix $\left[\begin{array}{c|c} A_{n-2} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{n-2} \end{matrix} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & \gamma_n \end{array}\right]$ nach der $(n-1)$-ten Zeile, ergibt sich

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A_{n-2} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{n-2} \end{matrix} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & \gamma_n \end{array}\right] = (-1)^{n-1+n-1}\gamma_n \det A_{n-2} \qquad (**)$$

Einsetzen von $(**)$ in $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned} \det A_n &= (-1)^{2n-1}\beta_{n-1} \cdot ((-1)^{2n-2}\gamma_n \det A_{n-2}) + (-1)^{2n}\alpha_n \det A_{n-1} \\ &= (-1)^{4n-3}\beta_{n-1}\gamma_n \det A_{n-2} + \alpha_n \det A_{n-1} \\ &= -\beta_{n-1}\gamma_n \det A_{n-2} + \alpha_n \det A_{n-1} \\ &= \alpha_n \det A_{n-1} - \gamma_n\beta_{n-1} \det A_{n-2}\,, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b)

Sei A_n wie in Teil a) mit $\alpha_i = 6$, $\gamma_i = \beta_i = \sqrt{5}$.
Zeige: $\det A_n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$

Lösung:

Beweis mit vollständiger Induktion

IA:
Für $n = 1$ ist $\det A_1 = \alpha_1 = 6$. Weil $\det A_1 = 6 = \frac{1}{4} \cdot 24 = \frac{1}{4}(5^{1+1} - 1)$, trifft die Behauptung für $n = 1$ zu.

Für $n = 2$ ist $\det A_2 = \alpha_1\alpha_2 - \gamma_2\beta_1 = 6 \cdot 6 - \sqrt{5}\sqrt{5} = 31$. Da $\det A_2 = 31 = \frac{1}{4} \cdot 124 = \frac{1}{4}(5^{2+1} - 1)$ trifft die Behauptung auch für $n = 2$ zu.

IS:
Gelte mit einem $n \geq 3$ die Behauptung für $n - 1$ und $n - 2$.

Zeige, dass die Behauptung dann auch für n gilt.

Aus 21a) wissen wir

$$\det A_n = \alpha_n \det A_{n-1} - \gamma_n\beta_{n-1} \det A_{n-2}$$

Mit $\alpha_n = 6$, $\gamma_n = \sqrt{5}$, $\beta_{n-1} = \sqrt{5}$ gilt

$$\begin{aligned}
\det A_n &= 6 \cdot \det A_{n-1} - \sqrt{5}\sqrt{5}\ \det A_{n-2} \\
&\overset{\text{IA}}{=} 6 \cdot \frac{1}{4}\,(5^{n-1+1} - 1) - 5 \cdot \frac{1}{4}\,(5^{n-2+1} - 1) \\
&= \frac{1}{4}\,(6 \cdot (5^n - 1) - 5(5^{n-1} - 1)) \\
&= \frac{1}{4}\,(6 \cdot 5^n - 6 - 5^n + 5) \\
&= \frac{1}{4}\,(5 \cdot 5^n - 1) \\
&= \frac{1}{4}\,(5^{n+1} - 1)\,,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt nun die Behauptung für alle $n \geq 3$.

c)

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & 1 \end{bmatrix}}_{=:\,B} = n!$$

Lösung:

Nach Satz 5.13(e) ändert sich die Determinante bei d. ZU von Typ 3 nicht.

Wir multiplizieren die Matrix B von links mit P, wobei P das folgende Produkt von Elementarmatrizen (Typ 3) ist:

$$P = Q_n^{n-1}(1) \dots Q_2^1(1)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\det B \quad &= \quad \det(PB) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & & \\ 0 & 0 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-1 & n-1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & n \end{bmatrix} \\
&\overset{5.13(i)}{=} \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \\
&= \quad n!\,,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war!