Musterlösung zu Aufgabe 26

a) **Beh.:** Es gilt $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}}$.

Beweis:
Zu zeigen ist

i) $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}}$

ii) $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}} \supseteq \langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}}$

zu ii):
Diese Aussage ist nach Voraussetzung bereits erfüllt, da sich jedes Element aus $\langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}}$ als Linearkombination der Erzeugenden von $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}}$ darstellen lässt.

zu i):
Nach einigem Umformen der Ausgangsgleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3\,, \\ v_2 &= -\frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2 + \frac{7}{3}w_3\,, \\ v_3 &= \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 - \frac{5}{3}w_3\,. \end{aligned}$$

Alle Koeffizienten sind rationale Zahlen. Mit dem gleichen Schluss wie bei ii) ergibt sich also auch diese Behauptung.

Da i) und ii) gelten, gilt auch

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}}\,.$$

□

b) **Beh.:** $\dim_{\mathbb{Q}}\langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}} = 3$, falls (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig sind.

Beweis:
Da (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig sind, gilt nach 6.25 und 6.19:

$$\dim_{\mathbb{Q}}\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}} = 3\,.$$

Nach Aufgabe 26 a) gilt mit $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{Q}} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle_{\mathbb{Q}}$ auch, dass die Dimensionen gleich sind. □